

**Bestimmung von Lyapunov-Exponenten
aus Zeitreihen gemessener
elektrischer Leitfähigkeiten**

Diplomarbeit
von
Oliver Günther

Physikalisches Institut
der Johann Wolfgang Goethe-Universität
Frankfurt am Main
August 1995

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	3
2	Grundlagen	5
2.1	Grundbegriffe der Nichtlinearen Dynamik	5
2.1.1	Dynamische Systeme	5
2.1.2	Attraktoren	7
2.1.3	Attraktoreigenschaften	8
2.1.4	Stabilität von dynamischen Systemen	11
2.1.5	Ruelle-Takens-Newhouse-Route ins Chaos	13
2.2	Barium-Natrium-Niobat (BSN)	14
2.2.1	Die Substanz Barium-Natrium-Niobat	14
2.2.2	Experimentelle Untersuchungen	14
2.2.3	Modell der elektrischen Leitfähigkeit	16
2.3	Charakterisierung experimenteller Systeme	17
2.3.1	Rekonstruktion der Systemdynamik	17
2.3.2	Empirische orthogonale Funktionen (EOF)	18
3	Lyapunov-Exponenten	22
3.1	Globale Lyapunov-Exponenten	23
3.1.1	Die Methode der QR-Zerlegung	24
3.1.2	Das Wolf-Verfahren	27
3.2	Lokalisierte Lyapunov-Exponenten	28
3.2.1	Definition und Berechnung	28
3.2.2	Die Methode der Vektorquantisierung	29
3.2.3	Beschreibung periodischer Zustände	31
3.3	Lyapunov-Exponenten von Delaysystemen	33
3.3.1	Die direkte Methode	34

3.3.2	Reduktion der Modell-Dimension	37
3.3.3	Verwendung der EOF-Zerlegungsmethode	39
3.4	Lyapunov-Exponenten aus experimentellen Zeitreihen	40
3.4.1	Rekonstruktion der Dynamik	41
3.4.2	Abschätzung der Jacobi-Matrix des Flusses	41
3.4.3	Probleme und deren Handhabung	45
4	Ergebnisse	48
4.1	Globale Lyapunov-Exponenten aus BSN-Zeitreihen	48
4.2	Lokalisierte Lyapunov-Exponenten aus BSN-Zeitreihen	56
4.3	Lyapunov-Exponenten entlang einer RTN-Route ins Chaos	59
4.4	Lyapunov-Exponenten aus der BSN-Modellgleichung	64
5	Diskussion	69
5.1	Globale Dynamik	71
5.2	Lokale Dynamik	75
5.3	Ergebnisse zur BSN-Modellgleichung	78
5.4	Ausblick	80
6	Zusammenfassung	81
7	Anhang	82
8	Literaturverzeichnis	84
9	Danksagung	89

1 Einleitung

Das junge Forschungsgebiet der Nichtlinearen Dynamik bezeichnet eine fachübergreifende Disziplin in allen Naturwissenschaften und besitzt eine große Bedeutung für alle Wissenschaftszweige, in denen nichtlineare Prozesse bei der Betrachtung typischer Probleme eine nicht zu vernachlässigende Rolle spielen.

Nichtlineare Systeme sind dadurch ausgezeichnet, daß sie gegenüber linearen Systemen das Phänomen des deterministischen Chaos zeigen können [1–4]. Deterministisches Chaos tritt in Systemen auf, die durch Bewegungsgleichungen vollständig gegeben sind, sich aber trotzdem langfristig unverhersagbar verhalten. Ein wesentlicher Bestandteil von deterministisch chaotischen Systemen ist, obwohl es scheinbar widersprüchlich klingt, eine ihm innewohnende Ordnung [5,6]. Zwar unvorhersagbar, aber nicht zufällig, bewegt sich ein deterministisch chaotisches System auf einer Struktur im Zustandsraum, dem sogenannten seltsamen Attraktor.

In unserer natürlichen Umwelt treten Nichtlineare Systeme in vielfältiger Weise auf. Die Beobachtung von deterministisch chaotischem Verhalten erstreckt sich deshalb über eine Vielzahl unterschiedlicher Gebiete, wie der Physik, der Meteorologie oder der Biologie [4,7,8], aber auch der Soziologie oder der Ökonomie [9,10]. Der überwiegende Teil der genannten Bereiche beschäftigt sich von Natur aus mit umfangreichen, komplexen Systemen, die viele Freiheitsgrade besitzen. Dabei tritt neben der zeitlichen Strukturbildung im Phasenraum auch die räumliche Ausbildung von charakteristischen Mustern.

Die Theorie über deterministisch chaotische Systeme wurde in den vergangenen Jahrzehnten vor allem durch Untersuchungen niedrigdimensionaler Systeme in der Physik ständig erweitert. Eine zufriedenstellende Theorie hochdimensionaler, komplexer Systeme existiert bis zum heutigen Zeitpunkt nicht und ist Gegenstand aktueller Forschung. Besonderes Interesse gilt dabei Systemen, die als Bindeglied zwischen niedrig- und hochdimensionalen Systemen aufzufassen sind. Dazu eignen sich einige Systeme aus der Festkörperphysik in idealer Weise, wie Untersuchungen zu elektrischen, magnetischen und optischen Eigenschaften von Festkörpern in den letzten Jahren eindrucksvoll gezeigt haben [11–14].

Untersuchungen zu Oszillationen der elektrischen Leitfähigkeit von Barium-Natrium-Niobat-Kristallen (BSN-Kristalle) haben bisher auf diesem Gebiet wichtige Beiträge leisten können [15–17]. Die elektrische Leitfähigkeit zeigt in Abhängigkeit von verschiedenen Kontrollparametern zeitlich irreguläres Verhalten, welches durch eine Ruelle-Takens-Newhouse-Route in Chaos gekennzeichnet ist [18,19]. Die Kristalle zeichnen sich darüberhinaus durch ausgeprägte nichtlineare optische Eigenschaften aus. Optische Untersuchungen und Korrelationenbetrachtungen anhand des Doppelbrechungsmusters gehören zu aktuellen Arbeiten auf diesem Gebiet. [20–22].

Zusammen mit den in dieser Arbeit vorgestellten Untersuchungen zu Lyapunov-Exponenten erhalten wir eine umfassende Charakterisierung der dynamischen Eigenschaften des BSN-Systems. Darüberhinaus ergeben sich neue Impulse zur Erweiterung des bestehenden Modells für periodische Leitfähigkeitsoszillationen [23] auf

komplexere Zustände.

Lyapunov-Exponenten erlauben eine quantitative Beschreibung chaotischer BSN-Zustände. Mit dem Betrag und der Anzahl der positiven Lyapunov-Exponenten erhalten wir charakteristische Größen zur Klassifizierung der chaotischen Dynamik. Wir beschäftigen uns im Rahmen dieser Arbeit vor allem mit der Bestimmung von Lyapunov-Exponenten aus experimentellen BSN-Zeitreihen. Wir bestimmen zusätzlich Lyapunov-Exponenten aus der BSN-Modellgleichung und vergleichen diese Ergebnisse mit experimentellen Befunden. Die BSN-Modellgleichung ist eine Delay-Differentialgleichung. Wir entwickeln deshalb verschiedene Verfahren, um Lyapunov-Exponenten aus Delay-Differentialgleichungen zu berechnen.

Mit Hilfe des Konzeptes der lokalisierten Lyapunov-Exponenten [24] untersuchen wir die Beiträge zum chaotischen Verhalten des BSN-Systems an lokalen Stellen im Phasenraum. Innerhalb dieser Untersuchungen betrachten wir verschiedene BSN-Zustände entlang einer Ruelle-Takens-Newhouse-Route und beschreiben die im rekonstruierten Phasenraum ablaufende Dynamik im Detail. Der Problematik der geschickten Phasenraumeinteilung in lokale Zellen begegnen wir dabei mit der Methode der Vektorquantisierung [25].

Die vorliegende Arbeit ist in vier Abschnitte eingeteilt. Im ersten Teil werden wir die Grundlagen vorstellen, auf denen wir im folgenden aufbauen werden. Wir beschreiben die Methoden und Größen aus der Nichtlinearen Dynamik, die wir in unserer Arbeit verwenden und betrachten das BSN-System von verschiedenen Blickwinkeln aus.

Im zweiten Teil betrachten wir die Bestimmung von Lyapunov-Exponenten aus experimentellen Zeitreihen, sowie aus gegebenen numerischen Differentialgleichungen. Zusammen mit der Methode der Vektorquantisierung stellen wir dann das Konzept der lokalisierten Lyapunov-Exponenten vor.

Der dritte Abschnitt dient der Darlegung unserer Ergebnisse über Lyapunov-Exponenten beim BSN-System, die wir anschließend im letzten Teil dieser Arbeit diskutieren wollen.

Wir schließen die Arbeit mit einer kurzen Zusammenfassung.

2 Grundlagen

In diesem Kapitel wollen wir auf die Grundlagen eingehen, die wir für unsere Untersuchungen des festkörperphysikalischen BSN-Systems, welches wir in Abschnitt 2.2 vorstellen werden, benötigen. Wir greifen auf verschiedenen Größen und Methoden aus der Nichtlinearen Dynamik zurück, um die charakteristischen Eigenschaften der Dynamik der elektrischen Leitfähigkeit von BSN-Kristallen zu beschreiben. Diese Größen wollen wir im folgenden Abschnitt erläutern. In Abschnitt 2.3 betrachten wir zwei bekannte Verfahren, mit deren Hilfe wir das BSN-System auf der Grundlage der skalaren Messreihen der elektrischen Leitfähigkeit charakterisieren können.

2.1 Grundbegriffe der Nichtlinearen Dynamik

2.1.1 Dynamische Systeme

Die Bedeutung und die Beschreibung nichtlinearer Prozesse ist in direkter Weise mit dem grundlegenden Konzept der dynamischen Systeme verbunden. Jedes dynamische System ist durch einen Fluß im Phasenraum gekennzeichnet. Dabei beschreibt jeder Punkt im Phasenraum einen möglichen Zustand des Systems. Die zeitliche Entwicklung eines Anfangszustandes erzeugt somit eine Folge von Punkten, die als Trajektorie bezeichnet wird.

Dynamische Systeme lassen sich in dissipative und konservative Systeme einteilen. Dissipative Systeme verlieren kontinuierlich Energie, zum Beispiel in Form von Reibung oder Strahlung. Damit solche Systeme nicht in einen Fixpunkt relaxieren, müssen sie ständig durch äußere Energiezufuhr angetrieben werden. Konservative Systeme zeigen keine Energiedissipation. Die Planetenbewegung im Sonnensystem ist in guter Näherung ein Beispiel für ein konservatives System. Im folgenden werden wir uns aber ausschließlich mit der Theorie dissipativer Systeme auseinandersetzen, da das BSN-System, welches im Mittelpunkt dieser Arbeit steht, dissipativer Natur ist.

Eine weitere Unterscheidung dynamischer Systeme wird bezüglich zeitdiskreter und zeitkontinuierlicher Dynamik getroffen. Physikalische Systeme sind im allgemeinen immer vom zeitkontinuierlichen Typ. Die Meßgrößen solcher Systeme besitzen zu jedem Zeitpunkt einen definierten Wert und ändern sich kontinuierlich mit der Zeit. Sind die einzelnen Komponenten und Gesetzmäßigkeiten des Systems bekannt, so läßt es sich vollständig durch Angabe seiner Phasenraumgeschwindigkeit, das heißt seiner zeitlichen Änderung beschreiben. Mathematisch geschieht dies durch einen Satz Differentialgleichungen erster Ordnung, deren Anzahl der Zahl der Phasenraum-Koordinaten, also der Zahl der Freiheitsgrade des Systems, entspricht.

$$\begin{aligned} \text{zeitliche Änderung:} \quad \dot{\vec{x}}(t) &= \vec{f}(\vec{x}, t) \\ \text{Fluß im Phasenraum:} \quad \vec{x}(t+T) &= \vec{F}^T(\vec{x}, t) \end{aligned}$$

Zeitdiskrete Systeme werden durch Abbildungen beschrieben. Der Zustand solcher Systeme ändert sich nur innerhalb endlicher Zeitspannen. Oftmals untersucht man physikalische Systeme, indem man sie auf Abbildungen reduziert, da die wichtigsten Eigenschaften der Dynamik in vielen Fällen in dieser vereinfachten Darstellung enthalten sind.

Trägt man zum Beispiel für einen chaotischen Zustand des Lorenz-Systems [26] die Werte zweier aufeinanderfolgender Maxima der Z-Koordinate $Z_{max}^{(k)}$, $Z_{max}^{(k+1)}$ gegeneinander auf, so erhält man den links in Abbildung 1 dargestellten Zusammenhang, welcher der Zeltabbildung [2] ähnelt und den nichtlinearen Charakter des Systems deutlich darstellt. Eine weitere bekannte Darstellungsform ist die Poincaré-Wiederkehrabbildung [2], welche die Phasenraumdynamik auf eine Ebene abbildet. In diesem Fall beschreibt die Abbildung die gleichgerichteten Durchstoßpunkte der Trajektorie durch die gewählte Poincaré-Ebene. Abbildung 1 (rechts) zeigt einen Poincaré-Schnitt durch den 2-Frequenz-Torus eines quasiperiodischen BSN-Zustandes, der aus einer skalaren Meßreihe der elektrischen Leitfähigkeit eines BSN-Kristalls rekonstruiert wurde.

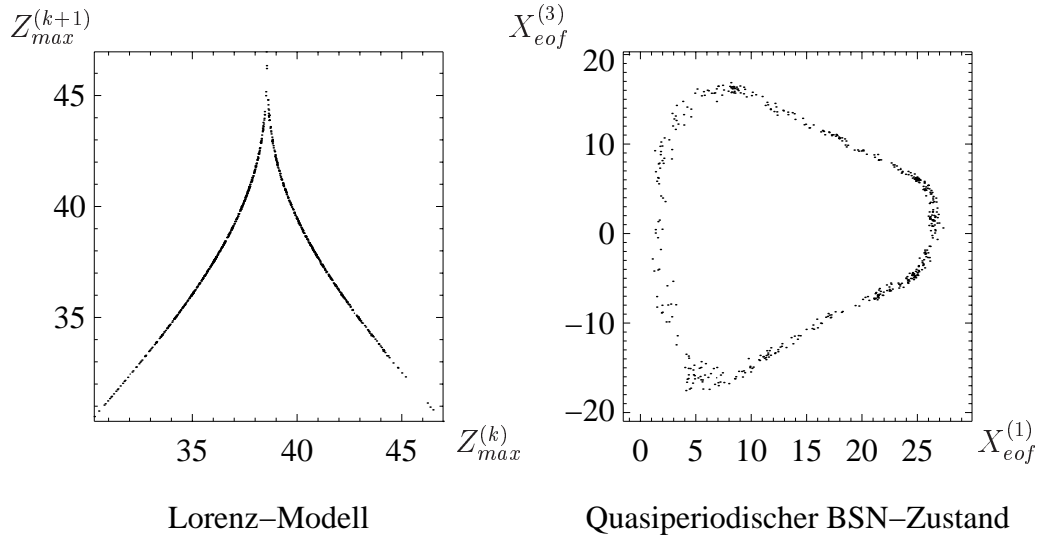


Abbildung 1: Links: Aufgetragen sind die aufeinanderfolgenden Maxima der Z-Koordinate des Lorenz-Systems für einen chaotischen Zustand. Man erkennt mit dieser auf eine Abbildung reduzierten Beschreibung den nichtlinearen Charakter des Systems. Rechts: Poincaré-Schnitt durch einen 2-Frequenz-Torus eines quasiperiodischen BSN-Zustandes im rekonstruierten Ersatz-Phasenraum. Zur Darstellung verwenden wir Delaykoordinaten, die in ein Koordinatensystem aus empirischen orthogonalen Funktionen transformiert sind (siehe Kapitel 2.3).

Die mathematische Beschreibung von Abbildungen geschieht durch Angabe einer Abbildungsvorschrift:

$$\vec{G} : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N \Rightarrow \vec{x}(k+1) = \vec{G}(\vec{x}(k))$$

Durch die Differentialgleichungen im zeitkontinuierlichen Fall oder die Abbildungs-

vorschrift im zeitdiskreten Fall ist jeder Freiheitsgrad in seiner Zeitentwicklung vollständig determiniert.

Eine weitere Unterteilung dynamischer Systeme wird bezüglich ihrer Zeitabhängigkeit getroffen. Systeme, deren zeitliche Entwicklung explizit von der Zeit abhängt, bezeichnet man als nicht autonom. Autonome Systeme hingegen sind nicht explizit von der Zeit abhängig, d.h. keine Phasenraumgeschwindigkeit enthält die Zeit direkt. Das BSN-System, wie wir es im Rahmen dieser Arbeit untersuchen ist autonom.¹ Abbildung 2 zeigt noch einmal zusammenfassend die verschiedenen Klassifikationsmerkmale dynamischer Systeme.

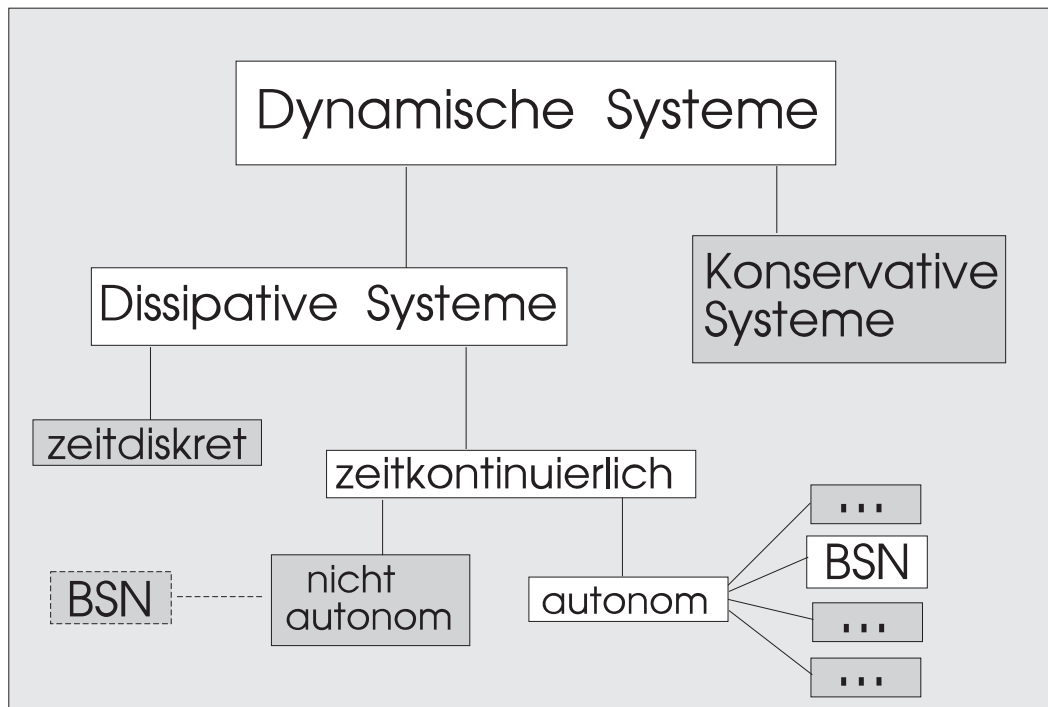


Abbildung 2: Klassifizierung dynamischer Systeme. Das BSN-System, wie es in dieser Arbeit untersucht wird, gehört innerhalb dieser Einteilung zur Klasse der dissipativen, zeitkontinuierlichen und autonomen Systeme.

2.1.2 Attraktoren

Die zeitliche Entwicklung eines linearen dissipativen Systems ist im allgemeinen sehr einfach. Bei fehlender äußerer Energiezufuhr wird es, ausgehend von einem beliebigen Startpunkt im Phasenraum, auf einen stabilen Fixpunkt zulaufen. Im Fall einer äußeren Anregung reagiert es linear auf die Störung und übernimmt die wesentli-

¹Es gibt jedoch auch die Möglichkeit den BSN-Kristall mit einer Wechselspannung periodisch anzutreiben [18], so daß das BSN-System dann als nicht autonom angesehen werden muß.

chen Eigenschaften der anregenden Dynamik. Das bekannteste Beispiel eines linearen dissipativen Systems ist der gedämpfte harmonische Oszillator, der bei periodischer Anregung zusätzlich das Phänomen der Resonanz zeigt.

Als Attraktor eines Systems bezeichnet man nun die Struktur im Phasenraum auf der sich das System nach einer genügend langen Einlaufphase, der sogenannten Transiente, bewegt. Der Attraktor des harmonischen Oszillators ist zum Beispiel entweder ein stabiler Fixpunkt oder eine periodische Bewegung, die auch als Grenzyklus bezeichnet wird (siehe Abbildung 3).

Das charakteristische Merkmal nichtlinearer Systeme ist, daß sie darüberhinaus einen weiteren Typ von Attraktor besitzen können, der aufgrund einiger ungewöhnlicher Eigenschaften, wie zum Beispiel einer im allgemeinen nicht ganzzahligen Dimension, als seltsamer Attraktor bezeichnet wird [27]. Als weitere, verbreitete Bezeichnung verwendet man auch den Begriff des chaotischen Attraktors, was ein direkter Hinweis bezüglich der Art der zugrundeliegenden Dynamik ist.

Eine chaotische Dynamik besitzt die Eigenschaft, daß sie kleine Abweichungen in den Anfangsbedingungen exponentiell mit der Zeit verstärkt, so daß eine Vorhersage des Systemzustandes nur für einen relativ kurzen Zeitraum möglich ist. Die mathematische Definition von chaotischem Verhalten geschieht mit Hilfe von Lyapunov-Exponenten, die wir in Kapitel 2.1.4 einführen werden.

Abbildung 3 stellt noch einmal den Zusammenhang zwischen der Systemdynamik und den entsprechenden Attraktortypen graphisch dar. Der Übersicht halber gehen wir an dieser Stelle nicht auf den Attraktor einer quasiperiodischen Bewegung ein. Wir werden quasiperiodische Zustände in Kapitel 2.1.5 im Abschnitt über die Ruelle-Takens-Newhouse-Route ins Chaos beschreiben.

2.1.3 Attraktoreigenschaften

Die Definition des Attraktors als Zustand eines dynamischen Systems nach einer endlichen Transiente läßt nur eine Charakterisierung durch statistische Größen zu. Im folgenden werden die gebräuchlichsten Größen zur Beschreibung von Attraktoren kurz vorgestellt.

Invariante Dichte: Mit der invarianten Dichte erhält man Informationen über die Antreffwahrscheinlichkeit bestimmter Zustände auf dem Attraktor, woraus sich eine direkte Beschreibung der Geometrie des Attraktors ergibt.

Die Dichte eines Attraktors, auf dem sich ein System ausgehend von einem Startwert \vec{x}_0 bewegt, ergibt sich für den zeitkontinuierlichen Fall zu:

$$\rho(\vec{x}) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \delta(\vec{x} - \vec{F}^t(\vec{x}_0)) dt \quad (1)$$

Bei Untersuchungen an experimentellen Zeitreihen oder numerischen Simulationen mittelt man nur über einen endlichen Zeitraum T und ein endliches Volumen anstelle der δ -Distribution. Man erhält damit die Dichte der durch die Dynamik erzeugten



Abbildung 3: Attraktortyp und Systemdynamik: Dargestellt sind Beispiele für Attraktoren von dynamischen Systemen. Die Bewegung auf dem Attraktor stellt sich, ausgehend von einem Startpunkt X_0 , nach Ablauf einer Transiente ein. Der chaotische Attraktor besitzt eine Dimension, die größer als zwei ist. In der Abbildung ist er auf eine Ebene projiziert.

Punktmenge im Phasenraum. Ist die in Gleichung (1) definierte Dichte $\rho(\vec{x})$ unabhängig vom Startwert \vec{x}_0 , so ist das System ergodisch und $\rho(\vec{x})$ wird als invariante Dichte bezeichnet [27]. Ergodische Systeme besitzen die angenehme Eigenschaft, daß das Zeitmittel einer von $\vec{x}(t)$ abhängigen Größe U , dem Ensemblemittel über die invariante Dichte entspricht:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T U(\vec{x}(t)) dt = \int_V \rho(\vec{x}) \cdot U(\vec{x}) d\vec{x}$$

Dimensionsmaße: Chaotische Attraktoren von dissipativen Systemen besitzen im allgemeinen eine fraktale Struktur, die durch eine nicht ganzzahlige Hausdorff-Dimension charakterisiert ist. Die Hausdorff-Dimension läßt sich als natürliche Erweiterung der bekannten ganzzahligen Dimensionen, wie $D = 1$ für einen Punkt, $D = 2$ für eine Fläche oder $D = 3$ für ein Volumen, auffassen. Die Überdeckung einer zweidimensionalen Fläche durch Quadrate der Kantenlänge ϵ skaliert bezüglich der Anzahl $M(\epsilon)$ der dazu benötigten Quadrate, wie ϵ^{-2} . Die Erweiterung auf beliebige geometrische Strukturen erfolgt durch die Verallgemeinerung $M(\epsilon) \propto \epsilon^{-D}$. Die

Hausdorff-Dimension D_0 ist dann definiert als [28]:

$$D_0 = - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\ln M(\epsilon)}{\ln(\epsilon)}$$

$M(\epsilon)$ ist dabei die Anzahl der d -dimensionalen Kästchen der Kantenlänge ϵ , die benötigt wird, um die Struktur im Phasenraum der Dimension d zu überdecken. Die Hausdorff-Dimension ist eine statistische Eigenschaft und ein wesentliches Kennzeichen eines Attraktors. Sie ist ein Spezialfall der verallgemeinerten Dimension D_q [29]:

$$D_q = \frac{1}{q-1} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left| \frac{1}{\ln(\epsilon)} \right| \ln \left(\sum_{i=1}^{M(\epsilon)} P_i^q \right) \text{ mit } q = 0, 1, \dots$$

Der Index i der Summe zählt dabei über alle nichtleeren Kästchen der Kantenlänge ϵ , welche den Attraktor überdecken. P_i ist die Wahrscheinlichkeit, daß sich das System in dem Kästchen i aufhält. Man kann leicht zeigen, daß für die verallgemeinerten Dimensionen die Abschätzung $D_{q_1} \leq D_{q_2}$ für $q_1 > q_2$ gilt [29]. Für $q=0$ ergibt sich sofort die Hausdorff-Dimension D_0 .

Die für die Praxis wichtigste Dimension ist jedoch die Korrelationsdimension D_2 . Mit einem nach Grassberger und Procaccia benannten Algorithmus läßt sich die Korrelationsdimension eines Attraktors aus einfachen Nachbarschaftsuntersuchungen bestimmen [30]. Man umgeht damit den Nachteil des Kästchenzähl-Verfahrens, das aufgrund der nach einem Potenzgesetz mit der Dimension wachsenden Kästchenzahl, nur unter einem hohen Zeitaufwand durchführbar ist.

Es gilt die allgemeine Abschätzung $D_0 \geq D_2$ [29]. Für viele physikalische Systeme gilt jedoch näherungsweise $D_2 \approx D_0$, so daß die Korrelationsdimension als gute Näherung der Hausdorff-Dimension angesehen werden kann [30].

Entropiemaße: Die in der nichtlinearen Dynamik verwendete Entropie hat ihren Ursprung in der Informationstheorie. Eine von Shannon eingeführte Größe $K^{(n)}$ ist proportional zu der Information, die man benötigt, um den Verlauf einer Trajektorie der Länge n mit der Genauigkeit ϵ zu beschreiben [31].

Ist d die Dimension des Systems, $\{i_k | k = 1, \dots, n\}$ eine Folge von Kästchen der Größe ϵ^d und $P_{i_1 i_2 \dots i_n}$ die Wahrscheinlichkeit dafür, daß sich die Trajektorie durch die Kästchenfolge $i_1 i_2 \dots i_n$ darstellen läßt, so erhält man die Shannon-Entropie aus:

$$K^{(n)} = - \sum_{i_1 i_2 \dots i_n} P_{i_1 i_2 \dots i_n} \log_2(P_{i_1 i_2 \dots i_n})$$

Entgegen der ursprüngliche Definition wird oftmals auch der natürliche Logarithmus anstelle des dyadischen Logarithmus verwendet.

Eine wichtige Größe, die den mittleren Verlust von Information über das System pro Zeiteinheit ausdrückt, ist die Kolmogorov-Entropie K_1 [32].

$$K_1 = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{(N-1) \cdot \Delta t} \sum_{n=1}^{N-1} (K^{(n+1)} - K^{(n)}) \quad (2)$$

Dabei ist $(K^{(n+1)} - K^{(n)})$ ein Maß für die zusätzliche Information, die man bei Kenntnis des Zustands $i_1 i_2 \dots i_{n-1}$ benötigt, um den Zustand $i_1 i_2 \dots i_n$ vorherzusagen. Die Grenzwerte $N \rightarrow \infty$ und $\Delta t \rightarrow 0$ stellen die Mittelung über den Attraktor im ergodischen System sicher. Mit $\epsilon \rightarrow 0$ erreicht man die Unabhängigkeit der Kolmogorov-Entropie von der gewählten Kästcheneinteilung.

Die Kolmogorov-Entropie erlaubt eine Klassifizierung dynamischen Verhaltens. Für eine periodische Bewegung gilt $K_1 = 0$. Deterministisch chaotische Systemzustände sind durch einen endlichen, positiven Wert von K_1 charakterisiert, während eine stochastische Bewegung durch $K = \infty$ beschrieben wird.

Wie bei den Dimensionsmaßen gibt es auch bei der Entropie eine verallgemeinerte Definition, die als Renyi-Entropien [33] bezeichnet werden.

$$K_q = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(q-1)} \cdot \frac{1}{n \cdot \Delta t} \cdot \ln \left(\sum_{i_1 \dots i_n} P_{i_1 i_2 \dots i_n}^q \right) \text{ mit } q=0,1,\dots$$

Hier gilt die Abschätzung $K_{q_1} > K_{q_2}$ für $q_2 > q_1$ [33]. Die Kolmogorov-Entropie ergibt sich aus dem Grenzwert $\lim_{q \rightarrow 1} (K_q)$. Die Korrelationsentropie K_2 besitzt wie die Korrelationsdimension D_2 eine wichtige praktische Bedeutung bei der Untersuchung experimenteller Zeitreihen. Sie läßt sich analog zu D_2 aus Korrelationsbetrachtungen mit dem Grassberger-Procaccia-Algorithmus bestimmen [33].

Eine weitere wichtige Größe zur Beschreibung eines Attraktors ist der Lyapunov-Exponent auf den wir im nächsten Abschnitt eingehen werden. Er ist als Maß für die Stabilität der Bewegung auch mit der Dimension und der Entropie eines dynamischen Systems verknüpft.

2.1.4 Stabilität von dynamischen Systemen

Ein wesentliches Merkmal und die Grundlage für die Definition von chaotischem Verhalten ist das exponentielle zeitliche Auseinanderlaufen eng benachbarter Anfangszustände unter dem Einfluß der Dynamik. Ein Maß für diese Divergenz ist der Lyapunov-Exponent [27,2]. Auf die numerische Bestimmung von Lyapunov-Exponenten aus gewöhnlichen Differentialgleichungen, Delay-Differentialgleichungen und aus experimentellen Zeitreihen werden wir ausführlich in Kapitel 3 eingehen. Hier soll der Begriff der Stabilität eines dynamischen Systems anhand der Herleitung des Lyapunov-Exponenten einer eindimensionalen, diskreten Abbildung anschaulich dargestellt werden.

Sind x_0 und $x_0 + \epsilon_0$ zwei eng benachbarte Startpunkte, die sich unter dem Einfluß einer diskreten Dynamik $F^k : x_0 \rightarrow x_k$ zeitlich entwickeln, so ergibt sich der Abstand

ϵ_N nach der Zeit N zu:

$$\epsilon_N = F^N(x_0 + \epsilon_0) - F^N(x_0) = \epsilon_0 \cdot e^{N \cdot \lambda(x_0)}$$

Im Grenzfalle $\epsilon_0 \rightarrow 0$ und $N \rightarrow \infty$ erhält man mit $\lambda(x_0)$ den exponentiellen Streckungsfaktor des Systems in Abhängigkeit vom Startpunkt x_0 :

$$\lambda(x_0) = \lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{\epsilon_0 \rightarrow 0} \frac{1}{N} \ln \left| \frac{F^N(x_0 + \epsilon_0) - F^N(x_0)}{\epsilon_0} \right| = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \ln \left| \frac{dF^N(x)}{dx} \Big|_{x_0} \right| \quad (3)$$

Die Verallgemeinerung dieses Konzeptes auf Systeme mit Dimensionen von $d > 1$ liefert dann d Lyapunov-Exponenten. Anschaulich stellen diese die exponentiellen Streckungsraten entlang der Hauptachsen eines d -dimensionalen Ellipsoides dar, welches sich aus einer d -dimensionalen Anfangskugel im Phasenraum entwickelt. Bei mehrdimensionalen Systemen ergeben sich die Lyapunov-Exponenten dann aus dem Übergang von der eindimensionalen Ableitung $\left| \frac{dF^N(x)}{dx} \right|_{x_0}$ zur Jacobi-Matrix des Flusses $\hat{D}\vec{F}^N|_{\vec{x}_0}$.

Die der Größe nach geordneten Lyapunov-Exponenten eines dynamischen Systems werden als Lyapunov-Spektrum bezeichnet. Im Gegensatz zu diskreten Abbildungen sind für das Auftreten von chaotischem Verhalten in kontinuierlichen Systemen mindestens drei Freiheitsgrade erforderlich. Dies ist als das Poincaré-Bendixson-Theorem bekannt [34].

Die Charakterisierung einer zeitkontinuierlichen Dynamik mit Hilfe von Lyapunov-Exponenten geschieht in der folgenden Weise. Ein positiver Lyapunov-Exponent besagt, daß sich das System chaotisch verhält. Für jede beliebig genaue Beschreibung des Anfangszustandes gibt es dann eine endliche Zeitspanne nach der sich, innerhalb sinnvoller Grenzen, keine Aussagen mehr über den Systemzustand machen lassen.

Ein negativer Lyapunov-Exponent kennzeichnet eine stauchende Richtung des Systems. Der größte Lyapunov-Exponent einer Fixpunktdynamik ist zum Beispiel kleiner als Null. Ein Lyapunov-Exponent von exakt Null besagt, daß eng benachbarte Anfangszustände im zeitlichen Mittel keine Streckung oder Stauchung erfahren. Bei chaotischen Zuständen in kontinuierlichen Systemen tritt immer ein Lyapunov-Exponent von Null auf, der die Streckung in Richtung des Flusses beschreibt. Bei periodischen Zuständen ist dieser Lyapunov-Exponent von Null dann gleichzeitig der größte Exponent.

Die Divergenzrate eines dynamischen Systems ergibt sich gemäß dem Divergenzsatz von Gauß zu [35]:

$$\frac{dV}{dt} = \int_V \operatorname{div} \vec{f} d\vec{x} = \int_V \left(\sum_{j=1}^d \frac{\partial f_j}{\partial x_j} \right) d\vec{x}$$

Für dissipative Systeme gilt die charakteristische Eigenschaft $\frac{dV}{dt} < 0$, das heißt, das System verliert kontinuierlich Energie und wird von dem der Dynamik zugrundeliegenden Attraktor angezogen.

Zwischen der mittleren Divergenz und den Lyapunov-Exponenten besteht der Zusammenhang $\langle \text{div} \vec{f} \rangle_t = \sum_{i=1}^d \lambda_i$. In dissipativen Systemen ist die Summe der Lyapunov-Exponenten des Systems also immer kleiner als Null. Bei Systemen mit konstanter Divergenzrate für alle Regionen im Phasenraum gilt dann:

$$\sum_{i=1}^d \lambda_i = \text{div} \vec{f} = \textit{konstant}$$

Die Kaplan-Yorke-Vermutung [36] beschreibt einen Zusammenhang zwischen den Lyapunov-Exponenten und der Attraktordimension. Die Kaplan-Yorke- oder Lyapunov-Dimension ist definiert als:

$$D_{KY} = j + \frac{\sum_{i=1}^j \lambda_i}{|\lambda_{j+1}|} \quad \text{mit } j = \max \left[k \mid \sum_{i=1}^k \lambda_i \geq 0 \right] \quad (4)$$

Die Vermutung ist $D_{KY} = D_{Attraktor}$. Für einige spezielle Systeme ist dieser Zusammenhang analytisch nachgewiesen und für viele Systeme ist er durch numerische Simulationen bestätigt [37,38]. Ein allgemeiner Beweis steht jedoch noch aus.

Als Pesin-Identität bezeichnet man folgenden Zusammenhang zwischen den positiven Lyapunov-Exponenten λ_i^+ und der Kolmogorov-Entropie [27]:

$$K_1 = \int d\vec{x} \cdot \rho(\vec{x}) \cdot \sum_i \lambda_i^+(\vec{x}_0) \quad (5)$$

Für ergodische Systeme gilt aufgrund der Unabhängigkeit der Lyapunov-Exponenten vom Startpunkt \vec{x}_0 auf dem Attraktor die vereinfachte Darstellung: $K_1 = \sum_i \lambda_i^+$

2.1.5 Ruelle-Takens-Newhouse-Route ins Chaos

Dynamische Systeme zeigen in Abhängigkeit von Kontrollparametern verschiedenartiges Verhalten. Feste Einstellungen der Kontrollparameter bewirken, daß die Dynamik nach einer Transiente auf einem Attraktor ablaufen wird. Durch Verändern der Kontrollparameter kann der Attraktortyp wechseln, so daß sich das dynamische Verhalten grundlegend ändert, wie zum Beispiel beim Übergang von einer Fixpunktdynamik zu einem Grenzzyklus.

Dieser Sprung in den dynamischen Eigenschaften des Systems wird als Bifurkation bezeichnet und tritt in ähnlicher Weise auch bei Phasenübergängen in der Thermodynamik auf. An Bifurkationspunkten befindet sich das System in einem Zustand zwischen Stabilität und Instabilität. Die Klassifizierung der Bifurkationen erfolgt mit Hilfe der linearen Stabilitätsanalyse [4].

Für dissipative, zeitlich chaotische Systeme sind zur Zeit drei beobachtete Routen von regulärem zu chaotischem Verhalten bekannt. Sie lassen sich anhand des charakteristischen Verhaltens der Eigenwerte der Jacobi-Matrix des Flusses $\hat{D}\vec{F}$ an den Bifurkationspunkten unterscheiden.

Neben der Periodenverdopplungsrouten [39] und der Intermittenzroute [4], ist die Ruelle-Takens-Newhouse-Routen [40] über Hopf-Bifurkationen der dritte bekannte Übergang ins Chaos. Hopf-Bifurkationen sind dadurch gekennzeichnet, daß die Eigenwerte von $\hat{D}\vec{F}$ in der komplexen Ebene über den Einheitskreis wandern. Bei jeder Hopf-Bifurkation entsteht eine neue, inkommensurable Frequenz im System.

Eine RTN-Routen ins Chaos ist durch eine Folge von 3 Hopf-Bifurkationen gekennzeichnet, welche das System von einem stabilen Fixpunkt über einen Grenzzyklus und einen 2-Frequenz-Torus ins Chaos führt.

Aufgrund experimenteller Untersuchungen konnte gezeigt werden, daß der Übergang ins Chaos beim BSN-System entlang einer RTN-Routen erfolgt [15,16,18]. Das BSN-Experiment ist darüberhinaus eines der wenigen Experimente bei dem ein langzeitstabiler 3-Frequenz-Torus nachgewiesen wurde [19].

2.2 Barium-Natrium-Niobat (BSN)

2.2.1 Die Substanz Barium-Natrium-Niobat

Die Abkürzung BSN steht für die Substanz Barium-Natrium-Niobat (englisch: Barium-Sodium-Niobat), einer festen Lösung innerhalb eines begrenzten Bereiches des ternären Systems $\text{BaO-Na}_2\text{O-Nb}_2\text{O}_5$ mit der stöchiometrischen Summenformel $\text{Ba}_2\text{NaNb}_5\text{O}_{15}$ [41,42]. Feste Lösungen sind eng verwandt mit kristallinen Strukturen, weswegen sich die Bezeichnung BSN-Kristall in der wissenschaftlichen Literatur eingebürgert hat.

Die BSN-Kristalle werden im Kristalllabor des Physikalischen Institutes der Universität Frankfurt gezogen. Die anschließende Probenpräparation umfaßt unter anderem das Schleifen und das ca. 12 Stunden andauernde Tempern der Kristalle bei etwa 1100 K. Anschließend wird der Kristall gepolt. Dies geschieht durch Abkühlen unter den Curiepunkt bei konstant gehaltenem äußeren elektrischen Feld. Die Platin-Elektroden sind dabei senkrecht zur c-Achse der Kristalle angebracht. Als Curiepunkt bezeichnet man den ferroelektrischen Phasenübergangspunkt bei ungefähr 850 K. Typischerweise hält man den Kristall beim Polen ca. eine halbe Stunde auf 870 K und erniedrigt die Temperatur dann kontinuierlich mit 20 K pro Stunde auf etwa 800 K.

2.2.2 Experimentelle Untersuchungen

Den Untersuchungen zu Lyapunov-Exponenten, die im Rahmen dieser Arbeit anhand experimenteller Zeitreihen der elektrischen Leitfähigkeit von BSN-Kristallen durchgeführt werden, liegt der schematisch dargestellte experimentelle Aufbau in Abbildung 4 zugrunde [17]. Die wesentlichen Komponenten sind neben dem präparierten Kristall, der sich in einer Probenhalterung im Ofen befindet, die Regelungseinheiten für die Temperatur, den Strom und die Gasatmosphäre, die

den Kristall umgibt. Die Zusammensetzung der Gasatmosphäre wird über den Sauerstoff-Partialdruck und den Wasserdampfgehalt geregelt. Für Untersuchungen zur Leitfähigkeits-Dynamik verwenden wir die Temperatur und den Strom durch die Probe als Kontrollparameter. Eine Variation der Gasatmosphäre ist technisch schwieriger zu handhaben. Die Gasatmosphäre aus angefeuchtetem Sauerstoff ist jedoch die Grundlage für die Ausbildung komplexer Oszillationen der elektrischen Leitfähigkeit, worauf wir in Abschnitt 2.2.3 eingehen werden.

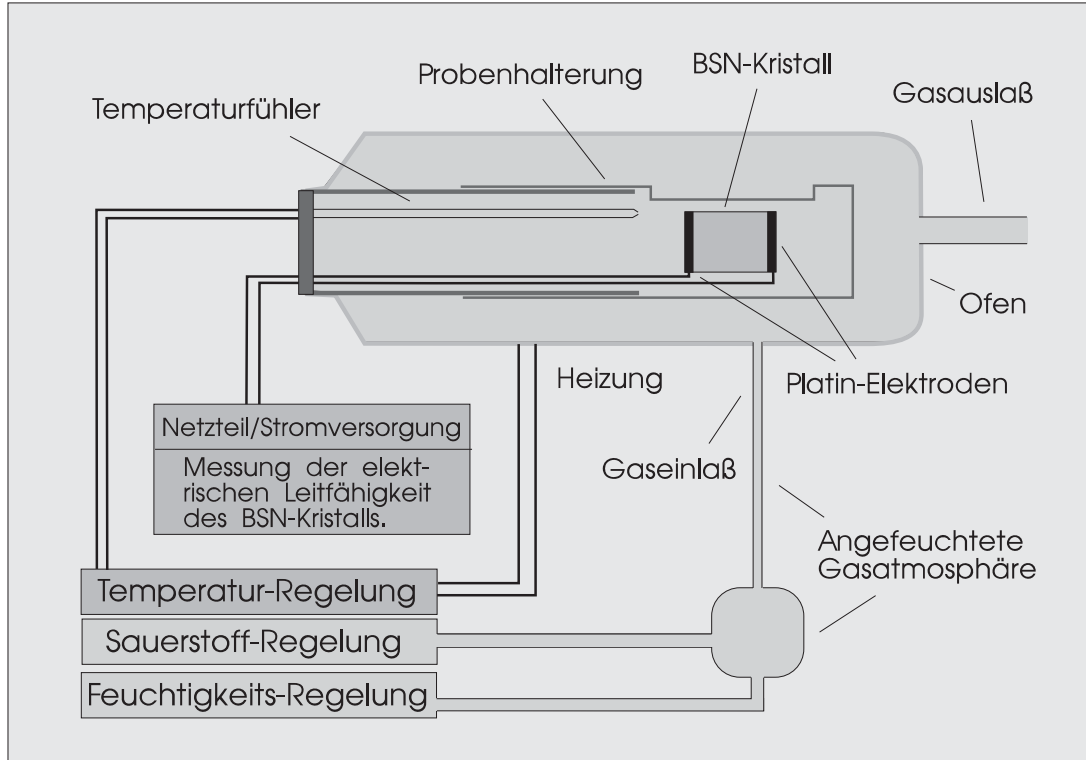


Abbildung 4: Schematischer Aufbau zur Messung der elektrischen Leitfähigkeit von BSN-Kristallen.

BSN besitzt bei Zimmertemperatur einen intrinsischen Bandabstand von ca. 3eV und verhält sich damit wie ein Isolator. Ab etwa 400 K beobachtet man eine stationäre elektrische Leitfähigkeit. Komplexere Zustände treten im Temperaturbereich von 550 K bis 850 K zwischen dem ferroelastischen und dem ferroelektrischen Phasenübergangspunkt auf. Dort können periodische, quasiperiodische und chaotische Oszillationen entsprechend der für BSN charakteristischen Ruelle-Takens-Newhouse-Route ins Chaos beobachtet werden [18,19].

Die Beschreibung komplexer BSN-Zustände anhand experimenteller Zeitreihen der elektrischen Leitfähigkeit von BSN-Kristallen, geschah bisher vor allem mit Hilfe der Fourier-Analyse, durch Dimensions- und Entropiebetrachtungen, die mit dem Grassberger-Procaccia-Algorithmus durchgeführt wurden [17,21] und durch optische

Untersuchungen [22]. Der Schwerpunkt der vorliegenden Arbeit liegt auf der Charakterisierung experimentell gegebener BSN-Zustände durch Lyapunov-Exponenten. Ein weiteres Ziel ist die numerische Bestimmung von Lyapunov-Exponenten aus dem für periodische BSN-Zustände bereits existierenden Modell und der Vergleich mit den Ergebnissen aus experimentellen Untersuchungen.

2.2.3 Modell der elektrischen Leitfähigkeit

Mit der theoretischen Beschreibung der elektrischen Leitfähigkeit von BSN erhalten wir tiefere Einblicke in die Systemdynamik und können aus der Anpassung der Modellparameter an experimentelle Messungen, Rückschlüsse auf physikalische und chemische Größen des BSN-Systems ziehen. Damit ergibt sich die Möglichkeit, experimentell nur schwer zugängliche Eigenschaften des Kristalls indirekt zu bestimmen [23].

Die elektrische Leitfähigkeit von BSN setzt sich aus ionischen und elektronischen Beiträgen zusammen, wobei jedoch der elektronische gegenüber dem ionischen Anteil vernachlässigbar ist. Im Dreiphasenexistenzgebiet, welches im Grenzbereich der porösen Platin-Elektrode, der angefeuchteten Gasatmosphäre und dem BSN-Kristall auftritt, liegen OH^- -, O^{2-} -Ionen und Sauerstofflücken vor. Die wesentlichen Leitfähigkeitsmechanismen spielen sich in diesem Bereich an der Kathode ab.

Unter dem Einfluß des äußeren Feldes bewegen sich die Sauerstofflücken im Kristall zur Kathode und bauen dort eine Polarisationschicht auf. Im Fall konstanter elektrischer Leitfähigkeit ist das durch die Polarisationschicht erzeugte elektrische Feld nicht ausreichend, um OH^- -Ionen im Dreiphasenexistenzgebiet aus ihren Adsorptionsplätzen in der Elektrode zu lösen. Die Polarisationschicht bleibt zeitlich unverändert, so daß sich ein stationärer Fluß von Elektronen und O^{2-} -Ionen von der Kathode zur Anode einstellt.

Periodische und komplexere Leitfähigkeitsoszillationen werden durch den Eintritt von OH^- -Ionen in den Kristall verursacht. Dabei wird die Polarisationschicht durch Rekombination partiell aufgelöst und OH^- -Ionen wandern in Domänen durch den Kristall zur Anode. Die Verminderung des elektrischen Feldes durch die abgebaute Polarisationschicht verhindert die Freisetzung weiterer OH^- -Ionen im Dreiphasenexistenzgebiet. Durch das äußere Feld baut sich dann die Polarisationschicht erneut auf und ein weiterer Zyklus beginnt.

Für periodische Oszillationen existiert ein physikalisches Modell, welches die genannten Prozesse berücksichtigt und mit dem experimentelle periodische Zustände erfolgreich modelliert werden können [23]. Das Verhalten der Polarisationschicht wird dabei durch einen Kondensator beschrieben, dem ein nichtlinearer Widerstand parallel geschaltet ist. Die charakteristische Größe, welche im Modell die Leitfähigkeitsdynamik in BSN-Kristallen beschreibt, ist durch die Polarisationsspannung U_p gegeben. Die Größe U beschreibt die Spannung, die über dem Kristall abfällt.

Die BSN-Modellgleichungen haben die Form [23]:

$$\begin{aligned}\frac{dU_p(t)}{dt} &= k_1 - k_2 \cdot e^{k_3 \cdot U_p(t)} - k_4 \cdot e^{k_5 \cdot U_p(t - k_6)} + k_7 \\ U(t) &= U_p(t) + k_8 \cdot (k_1 - k_2 \cdot (e^{k_3 \cdot U_p(t)} - 1))\end{aligned}\tag{6}$$

mit dem Parametervektor \vec{k} , dessen Komponenten $\{k_i \mid i = 1, \dots, 8\}$ die Temperatur, den Strom durch den Kristall und kristallspezifische physikalisch-chemische Größen beinhalten.

Die Modellgleichung (6) enthält einen Delayterm und gehört somit zur Klasse der Delay-Differentialgleichungen, welche gegenüber gewöhnlichen Differentialgleichungen eine besondere Behandlung erfordern und auf die wir in Kapitel 3.3 gesondert eingehen werden.

Der Delayansatz ist durch die endliche Zeitspanne bedingt, die zwischen dem Überschreiten des Schwellwertes der Polarisationsspannung und dem Eintreten von OH^- -Ionen in den Kristall liegt. Diese Verzögerung erfolgt im wesentlichen aufgrund physikalisch-chemischer Reaktionsabläufe im Dreiphasenexistenzgebiet, die schließlich die Freisetzung von OH^- -Ionen aus ihren Adsorptionsplätzen zur Folge haben. Ähnliche Mechanismen sind auch bei Untersuchungen zur elektrischen Leitfähigkeit bei Zirkonoxid beobachtet worden [43].

Komplexere Zustände, wie quasiperiodische und chaotische Oszillationen der elektrischen Leitfähigkeit können bisher mit diesem Modell nicht beschrieben werden. Experimentelle optische Untersuchungen [22] lassen darauf schließen, daß solche Zustände durch mindestens zwei Domänen von OH^- -Ionen, die durch den Kristall wandern, charakterisiert sind.

2.3 Charakterisierung experimenteller Systeme

Durch die Messung einer oder mehrerer für die Dynamik eines Systems charakteristischer Größen kann man einen Einblick in die dem System zugrundeliegenden Mechanismen und Zusammenhänge erhalten. Je nach der Dimension und der Kopplung der einzelnen Freiheitsgrade kann sich in einer einzigen Meßgröße die gesamte Dynamik widerspiegeln. Die Problematik, die dabei auftritt, ist die Rekonstruktion der Dynamik anhand einer einzigen Meßgröße.

2.3.1 Rekonstruktion der Systemdynamik

Unsere Untersuchungen zu Lyapunov-Exponenten aus experimentellen BSN-Zeitreihen führen wir an skalaren Zeitreihen der elektrischen Leitfähigkeit von BSN-Kristallen durch. Wir müssen uns aus diesem Grund mit der Rekonstruktion der Dynamik aus einer skalaren Meßreihe beschäftigen. Eine wesentliche Schwierigkeit

besteht in dem Auffinden eines Ersatz-Phasenraums, der eine möglichst getreue Wiedergabe des Original-Phasenraums darstellen soll. Ein erstmals von Packard [44] vorgeschlagenes Konzept wurde durch Takens [45] mathematisch formuliert und ist unter dem Namen Delayeinbettung ein etabliertes Verfahren in der Nichtlinearen Dynamik. Es erlaubt, bei Kenntnis von nur einer Meßgröße des Systems, einen geeigneten Ersatz-Phasenraum zu finden, der die topologischen Eigenschaften des Original-Phasenraums korrekt wiedergibt.

Dabei erzeugt man Vektoren mit einer Anzahl von Komponenten, die durch die Einbettungsdimension d_E festgelegt wird. Die Komponenten können aus einer Zeitreihe $x(t_i)$ mit $i=1, \dots, n$ gebildet werden, indem man die um Vielfache der Delayzeit τ versetzten Meßwerte verwendet. Auf diese Weise ergibt sich der Delayvektor:

$$\vec{x}_i^{Delay} = (x(t_i), x(t_i - \tau), x(t_i - 2 \cdot \tau), \dots, x(t_i - (d_E - 1) \cdot \tau))$$

Wahlweise können als Komponenten auch die Ableitungen der Meßgröße verwendet werden:

$$\vec{x}_i = \left(x(t_i), \frac{dx(t_i)}{dt}, \frac{d^2x(t_i)}{dt^2}, \dots, \frac{d^{d_E-1}x(t_i)}{dt^{d_E-1}} \right)$$

Da durch die Differentiation vorhandenes Rauschen in der Meßgröße x_i verstärkt wird, empfiehlt sich jedoch im allgemeinen die Verwendung von Delayvektoren [46].

In der Praxis hat die Wahl der Delayzeit τ und der Einbettungsdimension d_E einen wesentlichen Einfluß auf eine erfolgreiche Einbettung und damit einhergehend, eine erfolgreiche Rekonstruktion der Dynamik und allen darauf aufbauenden Berechnungen. Bei zu geringer Delayzeit liegen alle Delayvektoren eng um eine Gerade im Phasenraum. Für chaotische Zustände geht bei zu großer Delayzeit die Information über den zugrundeliegenden Zeitpunkt verloren, da die Korrelation der Meßwerte exponentiell mit der Zeit abnimmt.

Die Koordinaten des Ersatzphasenraums bleiben im allgemeinen ohne physikalische Bedeutung. Mit ihrer Hilfe lassen sich jedoch koordinateninvariante Größen der Dynamik berechnen, die eine umfassende Charakterisierung des Systems erlauben. Dies sind neben den Lyapunov-Exponenten die Attraktor-Dimension und -Entropie.

Stehen Zeitreihen verschiedener Meßgrößen eines Systems zur Verfügung, so können die Delayvektoren aus den verschiedenen Zeitreihen zusammengesetzt werden. Mehrere Meßgrößen müssen jedoch nicht notwendigerweise eine bessere Rekonstruktion der Dynamik bewirken, was man im allgemeinen Fall jedoch erwarten wird. Im Experiment wird man bevorzugt solche Größen messen, von denen man erwartet, daß sie die Systemdynamik gut repräsentieren.

2.3.2 Empirische orthogonale Funktionen (EOF)

Wie wir gesehen haben, erfordert die Rekonstruktion der Dynamik mit Delaykoordinaten die Wahl einer geeigneten Einbettungsdimension d_E . Bei der Dimensionsbestimmung mit dem Grassberger-Procaccia-Algorithmus [30] berechnet man die

Attraktordimension für eine Folge von Einbettungsdimensionen. Bei ausreichender Datenanzahl wird man eine Konvergenz der Attraktordimension mit wachsendem d_E beobachten. Der Algorithmus ist damit in der Lage die Dimension des Attraktors auch bei zu hoher Einbettung richtig abzuschätzen. Der Attraktor befindet sich in diesen Fällen in einem Unterraum des rekonstruierten Phasenraums.

Bei der Bestimmung von Lyapunov-Exponenten aus experimentellen Zeitreihen ergibt sich in solchen Fällen jedoch sofort das Problem der scheinbaren Exponenten, denn die Anzahl der Lyapunov-Exponenten eines Systems entspricht der Dimension des zugrundeliegenden Phasenraums. [47–49] Jeder Freiheitsgrad des Systems wird durch einen Lyapunov-Exponenten beschrieben und im Fall einer zu hochdimensionalen Einbettung erhält man zwangsläufig zusätzliche Lyapunov-Exponenten, die keine reale Bedeutung besitzen und die Abschätzung der Attraktor-Dimension bei Verwendung des Zusammenhanges (4) negativ beeinflussen. Eine Möglichkeit dieses Problem anzugehen besteht in der Verwendung der Methode der empirischen orthogonalen Funktionen(EOF), die auch unter den Namen singuläre Wertezerlegung, biorthogonale Zerlegung oder Karhunen-Loève-Zerlegung bekannt ist [50].

Dabei wird die Trajektorie eines dynamischen Systems in ein anderes Koordinatensystem transformiert. Diese Transformation ist linear und bijektiv und ordnet die Koordinaten nach ihrer mittleren Energie, wobei die gesamte Information des Systems erhalten bleibt. Um die Transformationsmatrix zu erhalten betrachtet man die Eigenvektoren der Korrelationsmatrix \hat{R} :

$$R_{ij} = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M u_i(t_m) \cdot u_j(t_m) \text{ mit } i, j = 1, 2, \dots, d \quad (7)$$

Dabei sind $\vec{u}(t_m) = (u_1(t_m), \dots, u_d(t_m)) = \vec{x}(t_m) - \langle \vec{x} \rangle$ die gegebenen Datenvektoren im Schwerpunkt-System. Die Datenvektoren lassen sich zum Beispiel mit der Methode der Delayeinbettung aus den Meßdaten $\{x_m\}$ mit $m = 1, \dots, M$ erzeugen.

Die Eigenvektoren von Gleichung (7) spannen das EOF-Koordinatensystem auf und bilden somit die Transformationsmatrix. Die Eigenwerte sind ein Maß für die Ausdehnung des Attraktors in die Richtung, die durch den entsprechende Eigenvektor gegeben ist. Sie beschreiben die mittlere quadratische Energie in die jeweilige Richtung.

Das Ergebnis einer EOF-Zerlegung ist in Abbildung 5, am Beispiel eines chaotischen Attraktors des Lorenz-Systems, dargestellt. Die Zeichenbereiche sind für alle 6 Bilder gleich groß gewählt. Man erkennt anschaulich, wie im EOF-Koordinatensystem die Ausdehnung in der dritten Koordinate stark reduziert ist. In diesem Beispiel sollte man die dritte Koordinate jedoch auch nach der EOF-Zerlegung nicht vernachlässigen, da sie für weitere Untersuchungen noch wichtige Details enthält, wie zum Beispiel die Information, ob sich die Trajektorie in dem Bild rechts unten bei $X_{eof}^{(2)} = -30$ im oberen oder im unteren Attraktorflügel aufhält.

Bei der Rekonstruktion der Dynamik aus experimentellen Zeitreihen erhält man mit dem Verfahren der Delayeinbettung im allgemeinen mehr Koordinaten, als für eine ausreichende Beschreibung notwendig sind. Die Darstellung in dem entsprechenden

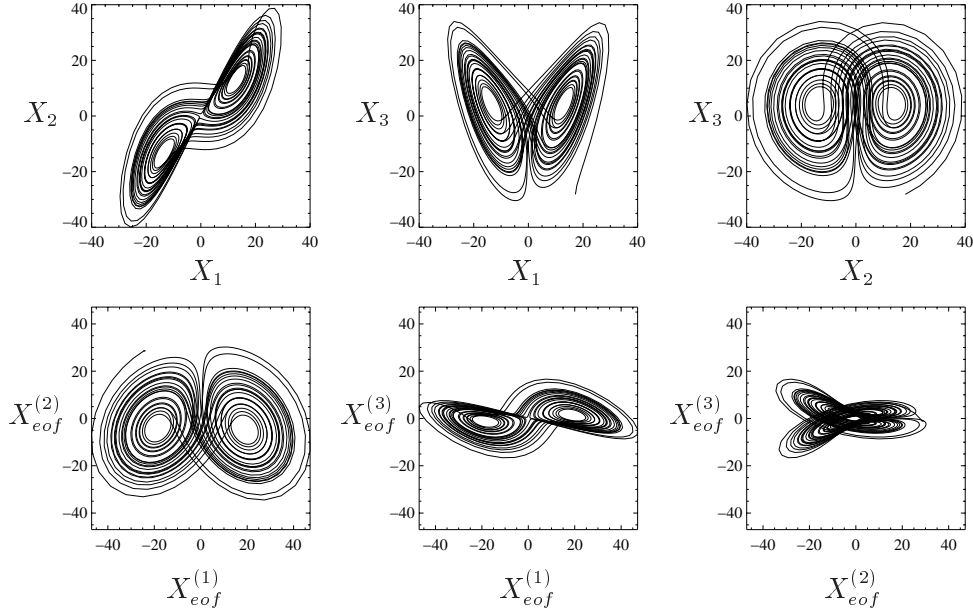


Abbildung 5: Beispiel einer EOF-Zerlegung am Lorenz-System. Oben: Projektion der ursprünglichen Schwerpunkt-Koordinaten in das X_1/X_2 -, X_1/X_3 - und das X_2/X_3 -Koordinatensystem. Unten: Projektion in das $X_{eof}^{(1)}/X_{eof}^{(2)}$ -, $X_{eof}^{(1)}/X_{eof}^{(3)}$ - und das $X_{eof}^{(2)}/X_{eof}^{(3)}$ -Koordinatensystem. Beide Darstellungen enthalten exakt die gleiche Information über die Dynamik, da die Transformation zwischen dem Original- und dem EOF-Koordinatensystem linear und bijektiv ist. Die mittlere quadratische Energie in Skalenteilen (SKT) beträgt für die Koordinaten des Original-Phasenraums 165.25, 209.74 und 167.42 SKT^2 . Durch die EOF-Zerlegung erhält man ein Koordinatensystem mit mittleren quadratischen Energien von 354.00, 167.36 und 21.04 SKT^2 .

EOF-Koordinatensystem kann dann oftmals unter Vernachlässigung der Koordinaten mit den niedrigsten mittleren quadratischen Energien erfolgen, ohne daß dabei wesentliche Information über den Attraktor verloren geht.

Ein weiterer Vorteil diese Methode gegenüber der gewöhnlichen Delayeinbettung ist die Möglichkeit, die gesamte Information aus dem Einbettungsfenster $\tau \cdot d_E$ zu nutzen, worauf wir in Kapitel 3.4.1 zurückkommen werden. Dabei erhält man im allgemeinen mit einer geringeren Zahl von Koordinaten eine vergleichbare Information über die Dynamik, wodurch sich zum Beispiel Lyapunov-Exponenten aus experimentellen Zeitreihen genauer abschätzen lassen (Kapitel 3.4).

Die EOF-Zerlegung ist auch Bestandteil einer der Algorithmen, mit dem wir in Kapitel 3.3 Lyapunov-Exponenten aus Delay-Differentialgleichungen berechnen werden. Der wesentliche Vorteil dieses Verfahrens liegt dann darin, daß die Zahl der für die Dynamik relevanten Koordinaten so stark hergesetzt werden kann, daß sich die

Rechenzeit spürbar verkürzt.

Das Konzept der schon in Kapitel 2.1.4 angesprochenen Lyapunov-Exponenten ist für die Charakterisierung und die Interpretation von chaotischem Verhalten grundlegend. Im folgenden Kapitel werden wir uns deshalb noch einmal ausführlich mit der Bedeutung und der Bestimmung von Lyapunov-Exponenten auseinandersetzen.

3 Lyapunov-Exponenten

Chaotisches Verhalten ist, wie wir in Kapitel 2.1.4 gesehen haben, durch mindestens einen positiven Lyapunov-Exponenten ausgezeichnet. Die Bestimmung von Lyapunov-Exponenten eines dynamischen Systems mit d Freiheitsgraden erfolgt durch die Erweiterung des eindimensionalen Konzeptes auf d Dimensionen. Die Betrachtung der zeitlichen Entwicklung einer Anfangsabweichung $\vec{\epsilon}_0$ unter dem Einfluß des Flusses $\vec{F} : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ ergibt:

$$\vec{\epsilon}(T) = \vec{F}^T(\vec{x}_0 + \vec{\epsilon}_0) - \vec{F}^T(\vec{x}_0)$$

Für hinreichend kleine $\vec{\epsilon}_0$, das heißt für $|\vec{\epsilon}_0| \rightarrow 0$, kann $\vec{F}^T(\vec{x}_0 + \vec{\epsilon}_0)$ durch eine Taylor-Entwicklung erster Ordnung [51] beschrieben werden:

$$\begin{aligned} \vec{F}^T(\vec{x}_0 + \vec{\epsilon}_0) &= \vec{F}^T(\vec{x}_0) + \hat{D}\vec{F}^T \Big|_{\vec{x}_0} \cdot \vec{\epsilon}_0 \\ \Rightarrow \quad \boxed{\vec{\epsilon}(T) = \hat{D}\vec{F}^T \Big|_{\vec{x}_0} \cdot \vec{\epsilon}_0} \end{aligned} \quad (8)$$

Der Vergleich mit dem eindimensionalen Fall (3) zeigt hier noch einmal, daß die totale Ableitung $\frac{dF}{dx}$ durch das totale Differential $\hat{D}\vec{F}$ ersetzt wird.

Die Lyapunov-Exponenten ergeben sich dann mit dem *multiplicative ergodic theorem* von Oseledec [52] aus den Eigenwerten μ_i von:²

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow \infty} \left\{ \left[\hat{D}\vec{F}^T(\vec{x}) \right] \cdot \left[\hat{D}\vec{F}^T(\vec{x}) \right]^{\dagger} \right\}^{\frac{1}{2 \cdot T}} \\ \Rightarrow \quad (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_d) = (\ln(\mu_1), \ln(\mu_2), \dots, \ln(\mu_d)) \end{aligned} \quad (9)$$

Die Einheit von Lyapunov-Exponenten ist nach dieser Definition durch $[\frac{1}{t}]$, also Eins pro Zeiteinheit gegeben. Andere gebräuchliche Einheiten sind *bits pro Zeiteinheit* (λ') oder *bits pro charakteristischer Zeiteinheit* (λ^*). Die aus der Informationstheorie stammende Bezeichnung *bits* bedeutet, daß anstelle des natürlichen Logarithmus der dyadische Logarithmus verwendet wird:

$$\Rightarrow (\lambda'_1, \lambda'_2, \dots, \lambda'_d) = (\log_2(\mu_1), \log_2(\mu_2), \dots, \log_2(\mu_d))$$

Die Umrechnung geschieht einfach mit den Formeln:

$$\lambda_i = \lambda'_i \cdot \ln(2) \quad \text{bzw.} \quad \lambda'_i = \lambda_i \cdot \log_2(e)$$

Als charakteristische Zeiteinheit verwendet man oftmals einen mittleren Attraktorkreislauf oder eine typische Periode des Systems [53,49]. Mit der Darstellung *bits pro*

²† bezeichnet dabei die transponierte Matrix

charakteristischer Zeiteinheit erhält man eine Größe, die mehr Information über das System enthält, da sie sich zusätzlich auf eine systemspezifische Zeit bezieht.

Die folgenden Abschnitte behandeln die Bestimmung von Lyapunov-Exponenten aus gegebenen Differentialgleichungen (Abschnitt 3.1) und aus experimentellen Zeitreihen (Abschnitt 3.4). Ein besonderes Augenmerk wird dabei auf die Bestimmung von Lyapunov-Exponenten aus Delay-Differentialgleichungen (Abschnitt 3.3) gerichtet sein, da diese Verfahren dann in Kapitel 4.4 auf die BSN-Modellgleichung angewendet werden. In Abschnitt 3.2 wird das Konzept der lokalisierten Lyapunov-Exponenten vorgestellt, die eine lokale Charakterisierung des Attraktors im Original- bzw. im rekonstruierten Ersatz-Phasenraum ermöglichen.

Als globale Lyapunov-Exponenten bezeichnen wir die gewöhnlichen, aus Gleichung (9) bestimmten Lyapunov-Exponenten, um sie von den lokalisierten Lyapunov-Exponenten zu unterscheiden.

3.1 Globale Lyapunov-Exponenten

In Abschnitt 2.1.4 haben wir dynamische Systeme mit Hilfe des Betrages der größten Lyapunov-Exponenten klassifiziert. Darüberhinaus eignet sich auch die Zahl der Lyapunov-Exponenten mit positivem Vorzeichen zur Charakterisierung einer chaotischen Dynamik.

Mehrere positive Lyapunov-Exponenten deuten auf ein verstärkt chaotisches Verhalten hin, da mehrere Freiheitsgrade zu der chaotischen Bewegung beitragen. Dies läßt sich auch aus Gleichung (4) durch eine erhöhte Dimension D_{KY} erkennen. Gleichung (4) zeigt aber auch, daß die gleiche Dimension D_{KY} für verschiedene Systeme mit einer unterschiedlichen Anzahl von positiven Lyapunov-Exponenten auftreten kann. Insbesondere ist der Betrag des größten Lyapunov-Exponenten kein direktes Maß für die Komplexität des betrachteten Systems. Untersuchungen zum Mackey-Glass-Modell [54] zeigen zum Beispiel, daß chaotische Zustände trotz wachsender Attraktordimension eine konstante Kolomogorov-Entropie besitzen können [53]. Aus Gleichung (4) und Gleichung (5) folgt damit sofort, daß der größte Lyapunov-Exponent in solchen Fällen mit wachsender Attraktordimension sogar abnehmen kann.

Als Beispiele für Lyapunov-Exponenten von chaotischen Zuständen sind in Tabelle 1 die numerisch bestimmten Lyapunov-Exponenten von einigen bekannten Modellsystemen angegeben. Zur Berechnung verwenden wir typische Parametereinstellungen, die wir im Anhang übersichtlich dargestellt haben.

Die Berechnung von Lyapunov-Exponenten gemäß Gleichung (9) stößt bei chaotischen Zuständen auf numerische Probleme, da für große T die streckenden Eigenschaften der Dynamik zu dermaßen großen Matrixelementen (a_{ij}) von $\hat{D}\vec{F}^T$ führen, daß die Darstellungsgenauigkeit jedes Computers überschritten wird. Im nächsten Abschnitt betrachten wir ein Verfahren, welches diese Schwierigkeiten umgeht und unter dem Namen QR-Zerlegung bekannt ist. Es liegt allen Berechnungen von Lyapunov-Exponenten in dieser Arbeit zugrunde. Der darauffolgende Abschnitt

		Lorenz		Rössler		Hyperrössler		Mackey-Glass	
λ_1	λ_1^*	1.50	1.08	0.07	0.62	0.11	0.82	0.0071	0.93
λ_2	λ_2^*	0.00	0.00	0.00	0.00	0.02	0.15	0.0025	0.33
λ_3	λ_3^*	-22.47	-16.21	-5.39	-47.24	0.00	0.00	0.0002	0.026
λ_4	λ_4^*	—	—	—	—	-24.08	-179.26	-0.016	-2.10
$T_{Charakt.}$			0.5		6.07		5.16		90.91

Tabelle 1: Lyapunov-Exponenten von bekannten Modellsystemen (siehe Anhang). Die Lyapunov-Exponenten λ_i bzw. λ_i^* sind in der Einheit $[\frac{1}{Zeiteinheit}]$ bzw. $[\frac{bits}{charakt.Zeiteinheit}]$ angegeben. Als Zeiteinheit verwenden wir in unseren Berechnungen die willkürliche Einheit Eins.

stellt kurz ein verwandtes und etwas älteres Verfahren vor, welches unter dem Namen Wolf-Verfahren bekannt ist.

3.1.1 Die Methode der QR-Zerlegung

Dieses elegante und numerisch stabile Verfahren zur Bestimmung von Lyapunov-Exponenten aus einer vorgegebene Dynamik wurde erstmals von Eckman und Ruelle vorgeschlagen [27]. Ausgehend von einer Anfangsabweichung $\vec{\epsilon}_0$ gegenüber einem Anfangszustand \vec{x}_0 erhält man im Grenzfall $\Delta t \rightarrow 0$ für die Abweichung $\vec{\epsilon}(\Delta t)$ nach der Zeit Δt :

$$\begin{aligned}\dot{\vec{\epsilon}}_0 &= \hat{D}\vec{f}|_{\vec{x}_0} \cdot \vec{\epsilon}_0 \\ \Rightarrow \vec{\epsilon}(\Delta t) &= \hat{D}\vec{F}^{\Delta t}|_{\vec{x}_0} \cdot \vec{\epsilon}_0\end{aligned}\tag{10}$$

$\vec{F}^{\Delta t}_{\vec{x}(t)}$ ist der Fluss: $\vec{x}(t) \rightarrow \vec{x}(t + \Delta t)$ und \vec{f} ist die Phasenraumgeschwindigkeit $\dot{\vec{x}}$.

Bei Verwendung von einfacher Euler-Integration erhält man den Zusammenhang:

$$\hat{D}\vec{F}^{\Delta t}|_{\vec{x}_0} \cong (\hat{1} + \hat{D}\vec{f}|_{\vec{x}_0} \cdot \Delta t)$$

Die wiederholte Anwendung von Gleichung (10) führt zu folgender Darstellung für die zeitlichen Entwicklung einer Anfangsabweichung $\vec{\epsilon}_0$:

$$\vec{\epsilon}(t) = \hat{D}\vec{F}^{\Delta t}|_{\vec{x}(t-\Delta t)} \cdot \hat{D}\vec{F}^{\Delta t}|_{\vec{x}(t-2\cdot\Delta t)} \cdot \dots \cdot \hat{D}\vec{F}^{\Delta t}|_{\vec{x}(\Delta t)} \cdot \hat{D}\vec{F}^{\Delta t}|_{\vec{x}_0} \cdot \vec{\epsilon}_0\tag{11}$$

Diese Gleichung (8) äquivalente Form ist der Ausgangspunkt der QR-Zerlegungs-Methode. Aus dem Produkt der Jacobi-Matrizen $\hat{D}\vec{F}^{\Delta t}|_{\vec{x}_i}$ erhält man über die Eigenwerte aus Gleichung (9) die Lyapunov-Exponenten des Systems.

Im Fall von mehrdimensionalen dynamischen Systemen enthalten die Jacobi-Matrizen zusätzlich zu den Streckungsraten auch noch die Information über Drehungen innerhalb des Phasenraums. Lyapunov-Exponenten beschreiben gemäß Gleichung (9) nur das Streckungsverhalten eines Systems. Die QR-Zerlegungs-Methode

zerlegt deshalb die Jacobi-Matrizen in drehende \hat{Q} - und in streckende \hat{R} -Anteile. Die \hat{Q} -Matrix ist dabei orthogonal und die \hat{R} -Matrix ist eine rechte obere Dreiecksmatrix. Diese Zerlegung ist bis auf die Vorzeichen der Matrizeneinträge eindeutig [27].

Durch sukzessive Anwendung dieses Verfahrens und unter Ausnutzung der Assoziativität der Matrizenmultiplikation, erhält man dann:

$$\begin{aligned}
\hat{D}\vec{F}^{n \cdot \Delta t}|_{\vec{x}_0} &= \hat{D}\vec{F}^{\Delta t}|_{\vec{x}(t-\Delta t)} \cdot \hat{D}\vec{F}^{\Delta t}|_{\vec{x}(t-2 \cdot \Delta t)} \cdot \dots \cdot \hat{D}\vec{F}^{\Delta t}|_{\vec{x}(\Delta t)} \cdot \hat{D}\vec{F}^{\Delta t}|_{\vec{x}_0} \\
&= \hat{D}\vec{F}^{\Delta t}|_{\vec{x}(t-\Delta t)} \cdot \hat{D}\vec{F}^{\Delta t}|_{\vec{x}(t-2 \cdot \Delta t)} \cdot \dots \cdot \hat{D}\vec{F}^{\Delta t}|_{\vec{x}(\Delta t)} \cdot \hat{Q}_0 \cdot \hat{R}_0 \\
&= \hat{D}\vec{F}^{\Delta t}|_{\vec{x}(t-\Delta t)} \cdot \hat{D}\vec{F}^{\Delta t}|_{\vec{x}(t-2 \cdot \Delta t)} \cdot \dots \cdot \hat{Q}_1 \cdot \hat{R}_1 \cdot \hat{R}_0 \\
&= \dots \\
&= \dots \\
&= \hat{Q}_{n-1} \cdot \hat{R}_{n-1} \cdot \dots \cdot \hat{R}_1 \cdot \hat{R}_0 \\
\hat{D}\vec{F}^{n \cdot \Delta t}|_{\vec{x}_0} &= \hat{Q} \cdot \prod_{i=n-1}^0 \hat{R}_i
\end{aligned}$$

Um die numerische Explosion dieses Produktes zu umgehen, nutzt man die folgende mathematische Äquivalenz aus: ³

$$\ln \left(\prod_{i=1}^n a_i \right) = \sum_{i=1}^n \ln a_i$$

Eckman und Ruelle haben gezeigt, daß sich die Logarithmen der Eigenwerte μ_i in Gleichung (9) für genügend große $T = n \cdot \Delta t$ über den Logarithmus des Betrages von $\prod_{j=0}^{n-1} r_{ii}^{(j)}$ bestimmen lassen, wobei $r_{ii}^{(j)}$ das Diagonalelement r_{ii} der j-ten \hat{R} -Matrix aus der QR-Zerlegung darstellt [27]. Die Lyapunov-Exponenten ergeben sich dann unter Verwendung von Gleichung (12) zu:

³Als anschaulicher Vergleich für die Idee, welche hinter diesem Verfahren steht, bietet sich das exponentielle Wachstum einer Population X an. Die das Wachstum charakterisierende Größe ist der Wachstums exponent a aus der Gleichung $X(t) = X_0 \cdot e^{a \cdot t}$. Nach jedem Zeitschritt Δt vergrößert sich die Population um den Faktor $k_i = \frac{X(i \cdot \Delta t)}{X((i-1) \cdot \Delta t)} = e^{a \cdot \Delta t}$. In diesem speziellen Beispiel ist k_i also konstant, was bei den Streckungsraten von chaotischen Systemen im allgemeinen nicht mehr der Fall ist. Dort variieren die Streckungsraten um einen mittleren Wert, was sich in unterschiedlichen lokalisierten Lyapunov-Exponenten (siehe Kapitel 3.2) äußert. Das mittlere exponentielle Wachstum ergibt sich in diesem einfachen Beispiel zu:

$$\bar{a} = \frac{1}{n \cdot \Delta t} \cdot \ln \left(\prod_{i=1}^n k_i \right) = \frac{1}{n \cdot \Delta t} \cdot \sum_{i=1}^n \ln(k_i) = \frac{1}{n \cdot \Delta t} \cdot \sum_{i=1}^n \ln(e^{a \cdot \Delta t}) = a \quad (12)$$

Der Ausdruck $\prod_{i=1}^n k_i$ wird für große n sehr groß. Der Logarithmus davon jedoch wieder klein genug, um ihn im Rahmen der Computergenauigkeit darstellen zu können. Anstelle das Produkt $\ln \left(\prod_{i=1}^n e^{a \cdot \Delta t} \right)$ auszurechnen, bestimmt man nun die Summe $\sum_{i=1}^n \ln(e^{a \cdot \Delta t})$. Die Idee besteht also darin, statt des Logarithmus einer großen Summe, die Summe von kleinen Logarithmen zu berechnen.

$$\boxed{\lambda_i = \frac{1}{n \cdot \Delta t} \cdot \ln \left| \left(\prod_{j=0}^{n-1} r_{ii}^{(j)} \right) \right| = \frac{1}{n \cdot \Delta t} \cdot \sum_{j=0}^{n-1} \ln |r_{ii}^{(j)}|} \quad (13)$$

Das Gleichheitszeichen in Gleichung (13) gilt streng genommen nur für die Grenzwerte $n \rightarrow \infty$ und $\Delta t \rightarrow 0$. Jede numerische Berechnung von Lyapunov-Exponenten ist immer nur eine Näherung an die exakten Werte.

Die numerischen Berechnungen bei gegebenen gewöhnlichen Differentialgleichungen führen wir im allgemeinen mit einem Runge-Kutta-Verfahren 4.Ordnung durch. [55]. Die übersichtliche Darstellung von Runge-Kutta-Verfahren beliebiger Ordnung kann mit Hilfe von Butcher-Tableaus geschehen [56,57]. Allgemeine Runge-Kutta-Verfahren für dynamische Systeme $\vec{x}(t) = \vec{f}(\vec{x}, t)$ haben die Form:

$$\begin{aligned} \vec{x}(t_0 + \Delta t) &= \vec{x}(t_0) + \Delta t \cdot \sum_{i=1}^s b_i \cdot \vec{f}_i \\ \text{mit } t_i &= t_0 + c_i \cdot \Delta t \\ \vec{f}_i &= \vec{f}(\vec{g}_i, t_i) \\ \vec{g}_i &= \vec{x}(t_0) + \Delta t \cdot \sum_{j=1}^s a_{ij} \cdot \vec{f}_j \end{aligned} \quad (14)$$

c_1	a_{11}	a_{12}	\dots	a_{1s-1}	a_{1s}
c_2	a_{21}	a_{22}	\dots	a_{2s-1}	a_{2s}
\cdot	\cdot	\cdot	\cdot	\cdot	\cdot
c_s	a_{s1}	a_{s2}	\dots	a_{ss-1}	a_{ss}
	b_1	b_2	\dots	b_{s-1}	b_s

0	0	0	0	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	0
$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	0
1	0	0	1	0
	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$

(Allgemeines Butcher-Tableau)

(Runge-Kutta-Verfahren 4. Ordnung)

Der in (14) gegebene Zusammenhang erfordert automatisch $a_{ij} = 0$ für $i \leq j$, da \vec{f}_j zum Zeitpunkt t_j für $j \geq i$ noch gar nicht bekannt ist. Die durch $\{a_{ij}\}$ gegebene Matrix ist damit für allgemeine Runge-Kutta-Verfahren immer eine strenge, linke untere Dreiecksmatrix.

Im nächsten Abschnitt werden wir kurz auf eine verwandte Methode zur numerischen Bestimmung von nur einigen Lyapunov-Exponenten eingehen. Die QR-Zerlegung ist jedoch eines der verbreitetsten Verfahren, da sich damit das gesamte Lyapunov-Spektrum eines dynamischen Systems mit zufriedenstellender numerischer Stabilität bestimmen läßt.

3.1.2 Das Wolf-Verfahren

Eine direkte Methode, die sich zur Bestimmung des größten Lyapunov-Exponenten eignet, ist das Verfolgen zweier eng benachbarter Trajektorien und der Vergleich der Beträge von der Anfangsabweichung $\vec{\epsilon}_0$ und deren zeitlichen Entwicklung $\vec{\epsilon}(T)$ nach genügend langer Zeit T .

$$\lambda_1 = \frac{1}{T} \cdot \ln \left(\frac{|\vec{\epsilon}(T)|}{|\vec{\epsilon}_0|} \right)$$

Dieses, unter anderem von Wolf [58] vorgeschlagene Verfahren berechnet automatisch den größten Lyapunov-Exponenten, da sich fast jede Anfangsabweichung nach ausreichender, meist relativer kurzer Zeit, in die Richtung der stärksten Streckung hineingedreht hat und die weitere zeitliche Entwicklung von $\vec{\epsilon}(t)$, dann gemäß dem größten Lyapunov-Exponenten verläuft.

Da sich auch hier das Problem des exponentiellen Anwachsens von $\vec{\epsilon}(T)$ ergibt, wird die Abweichung $\vec{\epsilon}(t)$ nach bestimmten, nicht notwendigerweise äquidistanten Zeitschritten Δt_i , normiert. λ_1 ergibt sich dann aus:

$$\lambda_1 = \frac{1}{T_n} \cdot \ln \prod_{i=1}^n k_i = \frac{1}{T_n} \cdot \sum_{i=1}^n \ln(k_i)$$

mit $T_i = \sum_{j=1}^i \Delta t_j$ und $k_i = \frac{|\vec{\epsilon}(T_i)|}{|\vec{\epsilon}(T_{i-1})|}$

Die Berechnung weiterer Lyapunov-Exponenten geschieht dann analog durch die Betrachtung der zeitlichen Entwicklung von Anfangsflächen, Anfangsvolumen, usw. . Diese verhalten sich proportional zu $e^{(\lambda_1+\lambda_2) \cdot t}$, $e^{(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3) \cdot t}$, usw., woraus sich beliebig viele Lyapunov-Exponenten des Systems sukzessive, aus der Kenntnis der bereits bekannten Lyapunov-Exponenten, berechnen lassen.

Neben der notwendigen Normierung von Flächen, Volumen, usw., müssen dann auch zusätzlich die Drehungen der einzelnen Achsen in Richtung der am stärksten streckenden Richtung rückgängig gemacht werden, da sonst numerische Probleme aufgrund der Nicht-Unterscheidbarkeit der einzelnen Richtungen auftreten. Diese Korrektur kann zum Beispiel mit Hilfe des Schmidtschen Orthogonalisierungs-Verfahrens [59] erfolgen. Bei der QR-Zerlegung geschieht dies automatisch durch die Wahl einer orthogonalen Matrix \hat{Q} .

Mit der Bestimmung der globalen Lyapunov-Exponenten erhält man systemspezifische Größen, die einen zeitlichen Mittelwert der exponentiellen Streckungsraten darstellen und den zugrundeliegenden Attraktor als Gesamtheit beschreiben. Im nächsten Abschnitt wollen wir ein Konzept vorstellen, welches eine lokale Charakterisierung des Attraktors auf der Basis der lokalen Streckungsraten gestattet.

3.2 Lokalisierte Lyapunov-Exponenten

Die Beschreibung von lokalen Streckungseigenschaften eines Attraktors erlaubt eine sehr viel detailliertere Charakterisierung der Dynamik. Abhängig von den Zielen, die man damit erreichen will, gibt es verschiedene Größen, die dem jeweiligen Zweck am besten angepaßt sind [24].

3.2.1 Definition und Berechnung

Als sinnvolle Größe für die lokale Beschreibung der BSN-Dynamik verwenden wir den lokalisierten Lyapunov-Exponenten. Er beschreibt, wie groß die mittleren lokalen Beiträge zum globalen Lyapunov-Exponenten sind [60,24].

Aufgrund der endlichen Datenanzahl bestimmen wir die lokalisierten Lyapunov-Exponenten aus endlich großen Zellen im Phasenraum. Die Berechnung erfolgt durch Mittelung der Logarithmen der Absolutwerte der Diagonalelemente $r_{ii}^{(j)}$ aus der QR-Zerlegung (Abschnitt 3.1.1), über fest definierte Zellen V_j ($j=1,\dots,M_Z$). Die Zellen überdecken den Attraktor vollständig und sind disjunkt. Die lokalisierten Lyapunov-Exponenten für eine gegebene Phasenraum-Einteilung ergeben sich dann aus:

$$\lambda_{lok,i}^{(j)} = \frac{1}{\Delta t} \cdot \frac{1}{M_j} \sum_{k=1}^{M_j} \ln |r_{ii}(j, k)| \quad (15)$$

$\lambda_{lok,i}^{(j)}$ beschreibt den i -ten lokalisierten Lyapunov-Exponenten der Zelle V_j und M_j ist die Zahl der Trajektorienpunkte, die innerhalb der Zelle V_j liegen. Theoretisch werden die lokalisierten Lyapunov-Exponenten, genauso wie die globalen Lyapunov-Exponenten, im Grenzwert $T \rightarrow \infty$ bestimmt. Bei der praktischen Berechnung steht jedoch nur eine endliche Anzahl M von Trajektorienpunkten zur Verfügung. Die Summe der Punkte über alle lokalen Zellen muß dann natürlich gleich der Anzahl der insgesamt verwendeten Trajektorienpunkte M sein:

$$M = \sum_{j=1}^{M_Z} M_j$$

Eine wichtige Eigenschaft der lokalisierten Lyapunov-Exponenten ist, daß sie mit dem Faktor $\rho_j = \left(\frac{M_j}{M}\right)$ gewichtet, gemittelt über alle Zellen V_j , den globalen Lyapunov-Exponenten ergeben (16). Der Faktor ρ_j ist bei Verwendung einer ausreichend großer Zellenzahl M_Z eine gute Näherung für die invarianten Dichte aus Gleichung (1).

$$\lambda_i = \sum_{j=1}^{M_Z} \rho_j \cdot \lambda_{lok,i}^{(j)} \quad (16)$$

Es erscheint daher vernünftig, die $\lambda_{lok,i}^{(j)}$ als die mittleren Beiträge zum globalen Lyapunov-Exponenten aus dem Phasenraumgebiet V_j aufzufassen. Damit ergibt

sich die Möglichkeit, Gebiete, die maßgeblich zum chaotischen Verhalten des Systems beitragen, zu identifizieren. Entsprechend lassen sich auch die stabilisierenden Abschnitte der Dynamik erkennen. Für den Fall, daß den Phasenraumkoordinaten physikalische Größen zugeordnet werden können, erhält man aus der Kenntnis der stabilisierenden und destabilisierenden Bereiche tiefere Einblicke in die der Dynamik zugrundeliegenden Mechanismen.

Wie schon erwähnt wurde, hängen die lokalisierten Lyapunov-Exponenten von der Wahl der lokalen Zellen V_j ab. Kritisch ist dabei eine zu grobe Einteilung, da dann unter Umständen auch über Bereiche mit stark unterschiedlichen dynamischen Eigenschaften gemittelt wird. Ein Verfahren, welches eine sinnvolle Phasenraum-Einteilung ermöglicht, wird im nächsten Abschnitt vorgestellt.

3.2.2 Die Methode der Vektorquantisierung

Die Einteilung des Phasenraums in lokale Zellen wird gewöhnlich in Form von gleich-großen Hyper-Quadern vorgenommen. Zwei Nachteile dieses Verfahrens sind die nach einem Potenzgesetz mit der Dimension anwachsende Kästchenzahl und die breite Häufigkeitsverteilung der Anzahl von Punkten pro Zelle.

Das Anwachsen der zur Überdeckung notwendigen Kästchenzahl mit der Dimension ist in Abbildung 6 (links) dargestellt. Bei den gewählten Einstellungen muß man schon für eine Dimension von $d=10$, 2^{10} Kästchen definieren und untersuchen. Dabei ist jede Koordinate in nur 2 Abschnitte eingeteilt. Eine realistische Einteilung sollte mindestens 10 Abschnitte verwenden, womit die benötigte Kästchenanzahl dann auf 10^{10} ansteigt. Bei der Rekonstruktion eines Ersatzphasenraums aus experimentellen BSN-Zeitreihen sind Einbettungsdimensionen von $d_E \geq 10$, speziell für chaotische Zustände, keine Seltenheit. Die immense Anzahl von Zellen, die sich dann aus der Einteilung des Phasenraums in Hyper-Quader ergibt, führt zu einem Aufwand, der sich nicht mehr innerhalb einer vernünftigen Zeit bewältigen läßt.

Eine breite Verteilung der Punktzahl pro Zelle bedeutet, daß die Mittelung innerhalb der Zellen mit einer von Zelle zu Zelle stark variierenden Anzahl von Punkten durchgeführt wird. Dies führt dann automatisch zu großen Unterschieden in der Streuung um den Mittelwert. Insgesamt stehen in Abbildung 6 (rechts) 1582 Zellen für 50000 Punkte zur Verfügung. Bei gleichmäßiger Verteilung der Zellen, sollten in jeder Zelle ca. 32 Punkte zur Mittelung bereitstehen. Die Einteilung in Hyper-Quader resultiert in einer Verteilung, die sehr breit ist und ein Maximum bei ca. 20 Punkten besitzt.

Eine elegante Methode, um die genannten Nachteile zu umgehen, wird durch das Verfahren der Vektorquantisierung bereitgestellt. Es teilt den Phasenraum in eine vorgegebene Anzahl von Zellen ein, die sich mit Hilfe einer iterativen Vorschrift an die Attraktor-Geometrie anpassen. Attraktorbereiche, die häufiger von der Trajektorie besucht werden, werden automatisch dichter mit Zellen überdeckt.

Die Methode der Vektorquantisierung ist ein in der digitalen Signaltheorie bekannt-

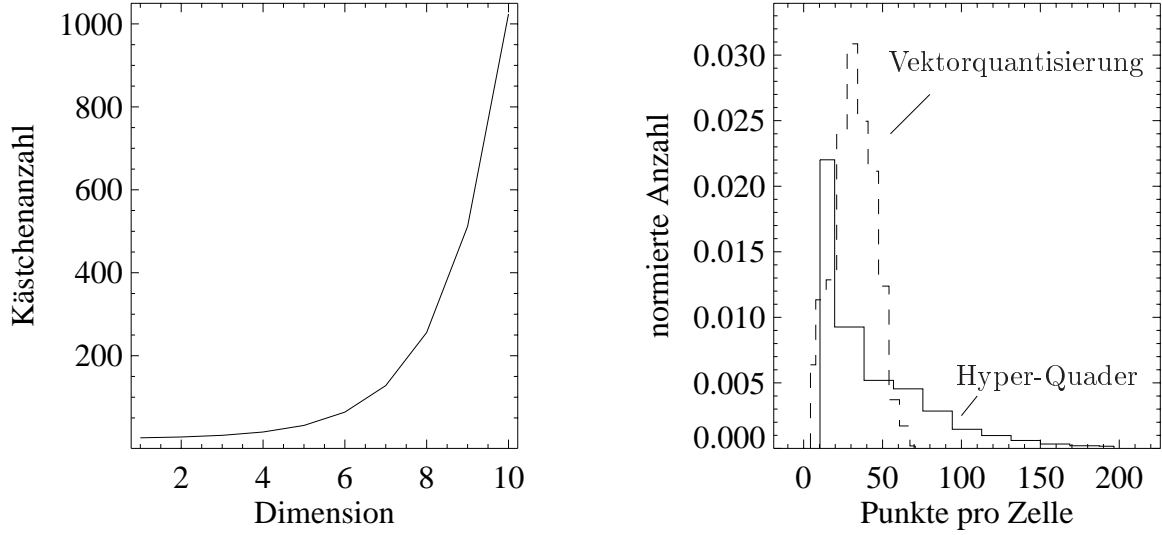


Abbildung 6: Links: Darstellung der nach einem Potenzgesetz mit der Dimension anwachsenden Kästchenzahl zur Überdeckung eines Attraktors. Dabei ist jede Koordinate in nur 2 äquidistante Abschnitte eingeteilt. Rechts: Normierte Häufigkeitsverteilung der Anzahl von Punkten in den lokalen Zellen für die gewöhnliche Einteilung in gleichgroße Hyper-Quader und für die Einteilung mit der Methode der Vektorquantisierung. Zugrunde liegen 50000 Punkte des Lorenz-Attraktors. Für beide Methoden werden 1582 Zellen verwendet. Wir erkennen, daß mit der Methode der Vektorquantisierung eine gleichmäßigere Überdeckung erfolgt.

tes Verfahren, um die von einer Signalquelle erzeugte Datenmenge zu reduzieren, ohne die darin enthaltene, relevante Information zu zerstören [25]. Übertragen auf das Problem der geschickten Beschreibung eines Attraktors bedeutet dies, eine Lokalisierung der Trajektorie durch die Angabe der Zelle, in der sich das System zum Zeitpunkt t aufhält.

Dazu wählt man eine feste Zahl M_Z von Zellen, die den Attraktor überdecken sollen. Die Zellenmittelpunkte $\vec{y}_i^{(0)}$ mit $i=1, \dots, M_Z$ definieren den Anfangszustand des iterativen Verfahrens. Sie werden zufällig aus der Menge der Trajektorienpunkte gewählt. Die Zellen V_i selbst sind dann definiert, als Menge aller Phasenraumpunkte \vec{p}_j für die der Zellenmittelpunkt $\vec{y}_i^{(0)}$, bezüglich einer Metrik $d(\vec{p}_j, \vec{y}_i)$, der nächstgelegene von allen Zellenmittelpunkten ist. Als Metrik verwenden wir die euklidische Abstandsnorm. Für Vektoren mit N Komponenten $(x_{j,1}, \dots, x_{j,N})$ ist sie gegeben durch:

$$d(\vec{p}_j, \vec{y}_i) = \sqrt{\sum_{\ell=1}^N (p_{j,\ell} - y_{i,\ell})^2} \quad (17)$$

Die Zellenmittelpunkte $\vec{y}_i^{(k)}$ werden als Codebuchvektoren bezeichnet. Der Index (k) bezieht sich auf die k-te Iteration. Für die Startverteilung gilt somit k=0. Alle M_Z Codebuchvektoren bilden das Codebuch $Y^{(k)} = (\vec{y}_1^{(k)}, \dots, \vec{y}_{M_Z}^{(k)})$.

In jedem Iterationsschritt wird ein neues Codebuch $Y^{(k)}$ berechnet. Dazu werden die Schwerpunkte der Trajektorienpunkte aus den alten Zellen als neue Codebuchvektoren $\vec{y}_i^{(k)}$ verwendet. Die Schwerpunkte ergeben sich einfach aus:

$$\vec{y}_i^{(k)} = \frac{1}{M_i^{(k-1)}} \sum_{j=1}^{M_i^{(k-1)}} \vec{x}_{j,i}^{(k-1)} \text{ für } i = 1, \dots, M_Z \quad (18)$$

Dabei sind $\vec{x}_{j,i}^{(k-1)}$ alle Trajektorienpunkte, die zum Iterationszeitpunkt (k-1) zum Codebuchvektor $\vec{y}_i^{(k-1)}$ gehören. $M_i^{(k-1)}$ ist die entsprechende Anzahl der $\vec{x}_{j,i}^{(k-1)}$.

Die sich durch die Iterationsvorschrift (18) entwickelnde Dynamik konvergiert auf eine Endverteilung der Zellen hin [25]. Als Maß, wie weit man zum gegebenen Iterationszeitpunkt von dieser Endverteilung entfernt ist, kann die relative Änderung $D_r^{(k)}$ des Quantisierungsfehlers $D^{(k)}$ verwendet werden.

$$\begin{aligned} D^{(k)} &= \frac{1}{M} \cdot \sum_{j=1}^M \left(\min\{d(\vec{x}_j, \vec{y}_i^{(k)})\} \text{ mit } i = 1, \dots, M_Z \right) \\ D_r^{(k)} &= \frac{D^{(k-1)} - D^{(k)}}{D^{(k)}} \end{aligned} \quad (19)$$

Die optimale Überdeckung, bei der $\lim_{k \rightarrow \infty} D^{(k)}$ das globale Minimum für eine feste Zellenanzahl M_Z annimmt, kann nur für einfache Fälle mit niedriger Systemdimension berechnet werden [25]. Das Verfahren konvergiert also unter Umständen gegen ein lokales Minimum des Quantisierungsfehlers D. In der Regel ist die sich ergebende Überdeckung jedoch für unsere Zwecke ausreichend, da sie der optimalen Verteilung im allgemeinen sehr nahe kommt. Sie hängt natürlich auch von der Wahl der Anfangsverteilung ab. Durch die zufällige Wahl der $\vec{y}_i^{(0)}$ auf dem Attraktor stellen wir eine gleichmäßige Startverteilung bereit.

Anschaulich wird durch die Iterationsvorschrift (18) sichergestellt, daß die Codebuchvektoren $\vec{y}_i^{(k)}$ von Gebieten mit hoher Punktdichte angezogen werden, da sich der Schwerpunkt einer Zelle automatisch in der Nähe der stark bevölkerten Bereiche befindet. Wir erhalten also mit der Methode der Vektorquantisierung eine an der Attraktordichte orientierte Überdeckung des Phasenraums.

3.2.3 Beschreibung periodischer Zustände

Mit Hilfe von lokalisierten Lyapunov-Exponenten können wir die Attraktoren, welche die Dynamik von BSN-Zuständen im rekonstruierten Phasenraum repräsentieren, detailliert beschreiben. Für periodische oder nahezu periodische Attraktoren wollen wir eine weitere Größe einführen, mit der wir eine anschauliche Darstellung der

stabilisierenden und destabilisierenden Bereiche erhalten. Wir werden in Kapitel 5.3 auf diese Größe zurückgreifen, wenn wir die Ergebnisse von Untersuchungen zur BSN-Modellgleichung mit experimentellen Ergebnissen vergleichen.

Wir wählen einen Startpunkt \vec{x}_{t_0} auf dem periodischen Orbit und verfolgen die Trajektorie über einen mittleren Attraktorumlauflauf. An jedem Trajektorienpunkt \vec{x}_{t_0+t} mitteln wir die Beiträge $R_j = \left(\frac{\ln |r_{jj}^{(\ell)}|}{T_E \cdot \Delta t} \right)$ über alle Nachbarn aus einem begrenzten Bereich um \vec{x}_{t_0+t} . Die r_{jj} sind die j-ten Diagonalelementen aus der QR-Zerlegung aus denen mit Gleichung (13) der globale Lyapunov-Exponent λ_j berechnet wird.

Wir erhalten dann einen Zusammenhang zwischen der Position auf dem periodischen Orbit und der Größe $\tilde{\lambda}_{t_0}^{(j)}(t, s_{max})$, die ein Maß für die Streckungseigenschaft der Dynamik an der betreffenden Stelle ist:

$$\tilde{\lambda}_{t_0}^{(j)}(t, s_{max}) = \frac{1}{N_{t_0}(t, s_{max})} \cdot \sum_{\ell=1}^{N_{t_0}(t, s_{max})} \left(\frac{\ln |r_{jj}^{(\ell)}|}{T_E \cdot \Delta t} \right)$$

Dabei ist $N_{t_0}(t, s_{max})$ die Anzahl von Nachbarn, welche zur Mittelung verwendet werden und die Bedingung $\|\vec{x}_{t_0+t} - \vec{x}_{Nachbar, t_0+t}^{(\ell)}\| \leq s_{max}$ erfüllen.

Bei ausreichender, aber nicht zu großer Wahl von s_{max} erhält man eine aussagekräftige Charakterisierung der lokalen Dynamik entlang des periodischen Orbits. Abbildung 7 zeigt anschaulich, welche Rolle die Wahl der Größe s_{max} dabei spielt. Dabei ist T_E der zeitliche Abstand zwischen zwei aufeinanderfolgenden Trajektorienpunkten.

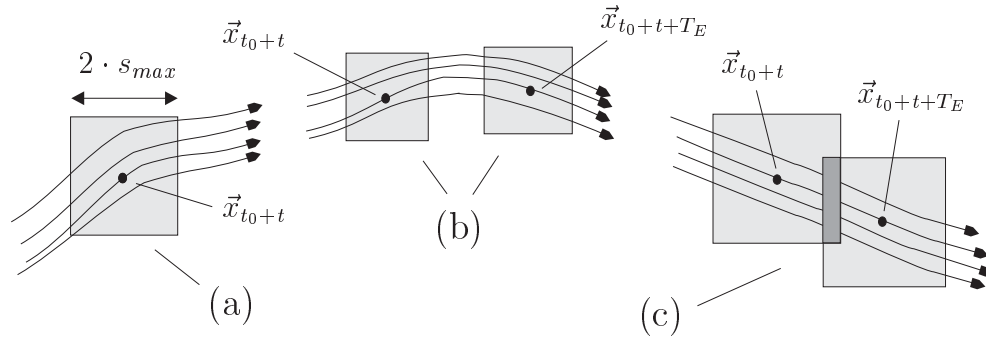


Abbildung 7: Anschauliche Bedeutung der Größe $\tilde{\lambda}_{t_0}^{(j)}(t, s_{max})$, die sich als Mittelwert der Größe R_j über alle Nachbarn aus einem begrenzten Bereich um \vec{x}_{t_0+t} ergibt. (a) Die Wahl der Größe s_{max} soll sicherstellen, daß bei der Bewegung entlang des periodischen Orbits ein ausreichend großer Bereich überdeckt wird. (b) Zwei aufeinanderfolgende Bereiche sind durch einen endlichen großen Abstand voneinander entfernt. (c) Zwei aufeinanderfolgende Bereiche überlappen sich.

Wir wählen s_{max} mindestens so groß, daß die Trajektorie an ihrer breitesten Stelle senkrecht zur Flußrichtung vollständig überdeckt wird (a). Je nach Abstand der

Trajektoriepunkte \vec{x}_{t_0+t} und $\vec{x}_{t_0+t+T_E}$ können nun die Fälle (b) oder (c) aus Abbildung 7 auftreten. In Fall (b) werden einige Trajektorienpunkte bei der Mittelung während eines Umlaufs entlang des Orbits ausgelassen. Fall (c) ist der Methode der übergreifenden Mittelung [61] verwandt und glättet die Funktion $\tilde{\lambda}_{t_0}^{(j)}(t, s_{max})$ auf Kosten der lokalen Auflösung.

Im optimalen Fall schließen die Bereiche, über die $\tilde{\lambda}_{t_0}^{(j)}(t, s_{max})$ gemittelt wird, immer stetig aneinander an. Im allgemeinen wird der Attraktor jedoch nicht vollständig und disjunkt überdeckt werden, so daß der Mittelwert von $\tilde{\lambda}_{t_0}^{(j)}(t, s_{max})$ über einen Attraktorumlauf nicht exakt dem globalen Lyapunov-Exponenten λ_j entspricht. Wir sind uns dieses Nachteils der Größe $\tilde{\lambda}_{t_0}^{(j)}(t, s_{max})$ gegenüber dem lokalisierten Lyapunov-Exponenten $\lambda_{lok,j}$ bewußt. Gleichzeitig erhalten wir jedoch eine Beschreibung der Dynamik anhand derer wir die charakteristischen stabilisierenden und destabilisierenden Bereiche von periodischen Zuständen übersichtlich darstellen können.

3.3 Lyapunov-Exponenten von Delaysystemen

In diesem Abschnitt behandeln wir die Bestimmung von Lyapunov-Exponenten aus Delay-Differentialgleichungen. Die hierzu entwickelten Algorithmen werden wir in Kapitel 4.4 anwenden, um das dynamische Verhalten der BSN-Modellgleichung zu untersuchen.

Delaysysteme besitzen als charakteristisches Merkmal einen zeitverzögerten Term in den die Dynamik beschreibenden Differentialgleichungen. Damit hängt die zeitliche Änderung des Systems unter anderem von seinem Zustand zu vorangegangenen Zeitpunkten ab. Praktisch alle Systeme, die Information innerhalb einer endlichen Zeit austauschen, müssen als Delaysysteme angesehen werden. Dazu gehören neben physikalischen Systemen auch zahlreiche Beispiele aus der Biologie [62,8], der Ökonomie [63,64] und vielen weiteren Gebieten.

Die BSN-Modellgleichung (6) ist ein Spezialfall einer kontinuierlichen Delay-Differentialgleichung, die nur einen diskreten Delayterm besitzt:

$$\frac{dU_p(t)}{dt} = f(U_p(t), U_p(t - \tau)) \quad (20)$$

Zusätzlich sind die Terme $U_p(t)$ und $U_p(t - \tau)$ entkoppelt, das heißt, jeder Term für sich alleine liefert einen Beitrag zur zeitlichen Änderung von U_p zur Zeit t .

Ein ausführlich untersuchtes Delaysystem, welches zur selben Klasse von Delay-Differentialgleichungen wie die BSN-Modellgleichung gehört, ist das Mackey-Glass-System zur Beschreibung der Konzentration von Blutzellen im menschlichen Organismus [54].

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{a \cdot x(t - \tau)}{1 + x^c(t - \tau)} - b \cdot x(t) \quad (21)$$

Wir werden die Algorithmen zur Bestimmung von Lyapunov-Exponenten aus Delaysystemen in Kapitel (4.4) mit der Mackey-Glass-Gleichung (21) testen.

Die allgemeine Form der beiden Delay-Differentialgleichungen (20) und (21) ist:

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t), x(t - \tau)) \quad (22)$$

Die Verfahren zur Berechnung von Lyapunov-Exponenten, die im folgenden beschrieben werden, beziehen sich auf diese spezielle Klasse von Delaysystemen.

Die Problematik, die beim numerischen Lösen und bei der Berechnung von Lyapunov-Exponenten von Delaysystemen der Form (22) auftritt, wird durch den Delayterm $x(t - \tau)$ hervorgerufen. Die vollständige Charakterisierung solcher zeitkontinuierlichen Delaysysteme erfordert zusätzlich zur Kenntnis der Differentialgleichungen auch die Vorgabe einer Anfangsbedingung, die bei Systemen mit diskretem Delay unendlich vielen Werten aus dem Startintervall $[x(t_0 - \tau), x(t_0)]$ entspricht [53]. Das Delaysystem besitzt also unendlich viele Freiheitsgrade und ist somit formal unendlich-dimensional. Dies erklärt auch, warum selbst relativ einfache Delay-Differentialgleichungen komplexes Verhalten bis hin zu hochdimensionalem Chaos zeigen können [53].

Im folgenden werden drei Verfahren vorgestellt, welche die Lyapunov-Exponenten eines Delaysystems mit diskretem Delayterm berechnen. Die einzelnen Verfahren bauen sukzessive aufeinander auf.

3.3.1 Die direkte Methode

Zum numerische Lösen von Delay-Differentialgleichungen mit diskretem Delay wird, entsprechend dem Lösen von gewöhnlichen Differentialgleichungen, eine endlich große Zeit-Schrittweite Δt verwendet. Zusätzlich müssen nun aber alle Funktionswerte aus dem vorangegangenen τ -Intervall zwischengespeichert werden, da sie bei der Integration benötigt werden. Bei gegebenem τ und Δt erhält man für einfache Integration mit dem Euler-Verfahren insgesamt $N = \frac{\tau}{\Delta t} + 1$ Stützstellen, die gespeichert werden müssen. Die Anfangsbedingung wird in Form von N Startwerten aus dem Zeitintervall $[t_0 - \tau, t_0]$ vorgegeben.

Dieser Ansatz approximiert das unendlich dimensionale Delaysystem durch N Dimensionen. Dabei ist die Dimension des genäherten Modells direkt mit der Integrationsschrittweite Δt gekoppelt. Dies führt besonders für große Delayzeiten zu unhandlich großen System-Dimensionen, welche ungünstigerweise, bei der Berechnung von Lyapunov-Exponenten, der Größe der Jacobi-Matrizen entsprechen.

Die beiden anschließenden Abschnitte stellen zwei Konzepte vor, mit denen die Integrationsschrittweite von der Dimension N des Systems entkoppelt wird, indem man sich auf die Betrachtung von nur einigen der N Koordinaten beschränkt. Beide Verfahren bauen jedoch auf Ideen auf, die für den direkten Ansatz mit N Koordinaten grundlegend sind. Diese sollen nun im folgenden vorgestellt werden.

Bei dem N-dimensionalen Modellansatz wird der Systemzustand durch einen N-dimensionalen Vektor $\vec{x}(t)$ beschrieben, der aus den Werten von x im Intervall $[t - \tau, t]$

gegeben ist:

$$\begin{aligned}\vec{x}(t) &= (x_1, x_2, \dots, x_{N-1}, x_N) \\ \vec{x}(t) &= (x(t - \tau), x(t - \tau + \Delta t), \dots, x(t - \Delta t), x(t))\end{aligned}\quad (23)$$

Die Zeitentwicklung von $\vec{x}(t)$ lässt sich symbolisch als Euler-Integration entweder in einem Einzelschritt oder in einer Blockabbildung darstellen (Abbildung 8):

$$\begin{aligned}\text{Einzelschritt:} \quad x_1(t + \Delta t) &= x_2(t) \\ x_2(t + \Delta t) &= x_3(t) \\ &\dots \\ x_{N-1}(t + \Delta t) &= x_N(t) \\ x_N(t + \Delta t) &= x_N(t) + f(x_N(t), x_N(t - \tau)) \cdot \Delta t \\ &= x_N(t) + f(x_N(t), x_1(t)) \cdot \Delta t\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Blockabbildung:} \quad x_1(k + 1) &= x_N(k) \\ x_2(k + 1) &= x_1(k + 1) + f(x_1(k + 1), x_1(k)) \cdot \Delta t \\ &\dots \\ x_{N-1}(k + 1) &= x_{N-2}(k + 1) + f(x_{N-2}(k + 1), x_{N-2}(k)) \cdot \Delta t \\ x_N(k + 1) &= x_{N-1}(k + 1) + f(x_{N-1}(k + 1), x_{N-1}(k)) \cdot \Delta t\end{aligned}$$

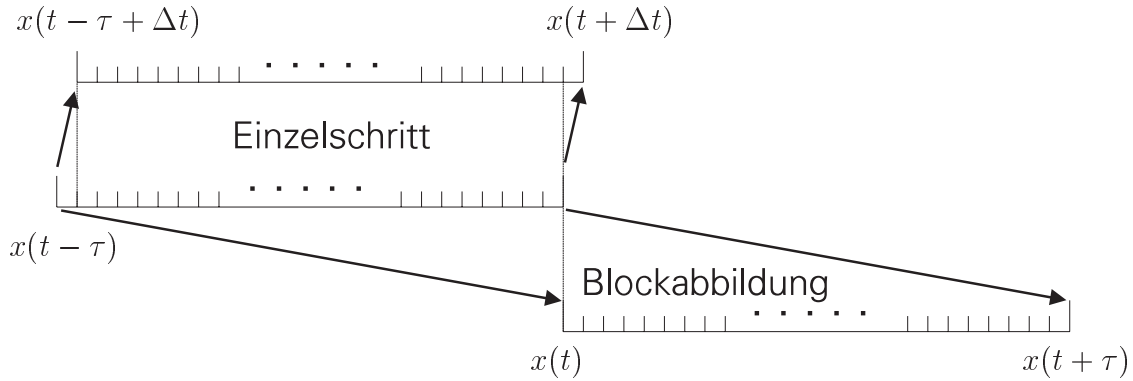


Abbildung 8: Die Abbildung zeigt die beiden Ansätze zur Beschreibung der zeitlichen Entwicklung eines Delaysystems, welches mit N Dimensionen angenähert wird.

Die Jacobi-Matrix $\hat{D}\vec{F}$ hat dann für den Einzelschritt folgende Form:

$$\hat{D}\vec{F}^{\Delta t}\Big|_{\vec{x}(t)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \frac{\partial f(x, x_\tau)}{\partial x_\tau}\Big|_{x(t-\tau)} \cdot \Delta t & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 + \frac{\partial f(x, x_\tau)}{\partial x}\Big|_{x(t)} \cdot \Delta t \end{pmatrix}$$

Für die Blockabbildung ergibt sich die entsprechende Jacobi-Matrix einfach aus der Multiplikation der (n-1) Jacobi-Matrizen $\hat{D}\vec{F}^{\Delta t}\Big|_{\vec{x}(t+i\cdot\Delta t)}$ mit $i = 0, 1, \dots, n-2$ zu:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \frac{\partial f}{\partial x_\tau}\Big|_{x_1(k)} \cdot \Delta t & 0 & 0 & \cdots & 0 & Z_{11} \\ Z_{12} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_\tau}\Big|_{x_1(k)} \cdot \Delta t & \frac{\partial f}{\partial x_\tau}\Big|_{x_2(k)} \cdot \Delta t & 0 & \cdots & 0 & Z_{12} \\ Z_{13} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_\tau}\Big|_{x_1(k)} \cdot \Delta t & Z_{23} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_\tau}\Big|_{x_2(k)} \cdot \Delta t & \frac{\partial f}{\partial x_\tau}\Big|_{x_3(k)} \cdot \Delta t & \cdots & 0 & Z_{13} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ Z_{1N-1} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_\tau}\Big|_{x_1(k)} \cdot \Delta t & Z_{2N-1} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_\tau}\Big|_{x_2(k)} \cdot \Delta t & \cdots & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_\tau}\Big|_{x_{N-1}(k)} \cdot \Delta t & Z_{1N-1} \end{pmatrix}$$

$$\text{Dabei ist } Z_{ij} = \prod_{\ell=i}^j \left(1 + \frac{\partial f(x, x_\tau)}{\partial x}\Big|_{x_\ell(k+1)} \cdot \Delta t \right) \quad (24)$$

Die Integration und die Berechnung der Jacobi Matrix des Flusses $\hat{D}\vec{F}$ wird mit Runge-Kutta-Verfahren verschiedener Ordnungen durchgeführt. Mit den in Kapitel 3.1 verwendeten Butcher-Tableaus können die unterschiedlichen Verfahren übersichtlich dargestellt werden. Neben dem Runge-Kutta-Verfahren 4.Ordnung verwenden wir für die späteren Berechnungen noch das Dormand-Prince-Verfahren [56,65], welches in dem Butcher-Tableau auf Seite 37 dargestellt ist.

0	0	0	0	0	0	0	0
$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	0	0	0	0	0	0
$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{40}$	$\frac{9}{40}$	0	0	0	0	0
$\frac{4}{5}$	$\frac{44}{45}$	$-\frac{56}{15}$	$\frac{32}{9}$	0	0	0	0
$\frac{8}{9}$	$\frac{19372}{6561}$	$-\frac{25360}{2187}$	$\frac{64448}{6561}$	$-\frac{212}{729}$	0	0	0
1	$\frac{9017}{3168}$	$-\frac{355}{33}$	$\frac{46732}{5247}$	$\frac{49}{176}$	$-\frac{5103}{18656}$	0	0
1	$\frac{35}{384}$	0	$\frac{500}{1113}$	$\frac{125}{192}$	$-\frac{2187}{6784}$	$\frac{11}{84}$	0
	$\frac{35}{384}$	0	$\frac{500}{1113}$	$\frac{125}{192}$	$-\frac{2187}{6784}$	$\frac{11}{84}$	0

(Dormand-Prince-Verfahren)

Zur Frage, welche zeitverzögerten Werte man bei den Runge-Kutta-Verfahren an den Zwischenstellen eines Integrations schrittes verwendet, gibt es mehrere Möglichkeiten. Zum Einen können die alten Zwischenstellen zur Zeit $t - \tau$ verwendet werden [56]. Eine weitere Möglichkeit ist die Verwendung von interpolierten Werten im jeweiligen Intervall. Die Interpolation kann auf verschiedene Art und Weise geschehen. Eine zum verwendeten Runge-Kutta-Integrationsverfahren sinnvolle Erweiterung ist die kontinuierliche Interpolation [56,66]. Zur Unterscheidung bezeichnen wir die Integrationsverfahren bei Verwendung von interpolierten Werten anstelle der alten Zwischenstellen, als Runge-Kutta' und Dormand-Prince'.

Die Berechnung der Lyapunov-Exponenten geschieht schließlich durch die Bestimmung der Jacobi-Matrix des Flusses $\hat{D}\vec{F}$ an den Stellen $\vec{x}(t)$ für die Einzelschritt- bzw. an den Stellen $\vec{x}(k)$ für die Blockabbildung und der anschließenden Anwendung der QR-Zerlegung, wie sie in Abschnitt 3.1.1 beschrieben ist.

3.3.2 Reduktion der Modell-Dimension

Eine einfache Methode, um die Dimension N des Systems zu reduzieren besteht darin, nur jede zweite, dritte oder allgemein, nur jede j -te Koordinate der Zustandsvektoren $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N)$ zu betrachten. Anschaulich bedeutet dies für ein Delay-system, daß dessen Zustand nicht durch einen gesamten Kurvenausschnitt, sondern nur durch einen ganzzahligen Bruchteil der ursprünglich N Koordinaten repräsentiert wird. Diese Vorgehensweise erinnert entfernt an das Rekonstruieren eines Ersatz-Phasenraums mit dem Verfahren der Delayeinbettung und einer Delayzeit τ , die größer als ein Zeitschritt gewählt wird.

Die Integrationsschrittweite Δt bleibt dabei unbeeinflusst. Sie ist nun von der Systemdimension N entkoppelt. Als Folge ergeben sich die zwei Möglichkeiten. Entweder kann die Schrittweite Δt bei fester Wahl der Systemdimension vermindert werden,

um die Integration mit erhöhter Genauigkeit durchführen zu können. Oder man vermindert die Systemdimension bei fester Wahl der Schrittweite, um die zu hohe Dimension, die sich im allgemeinen aus dem direkten Ansatz ergibt, zu verringern.

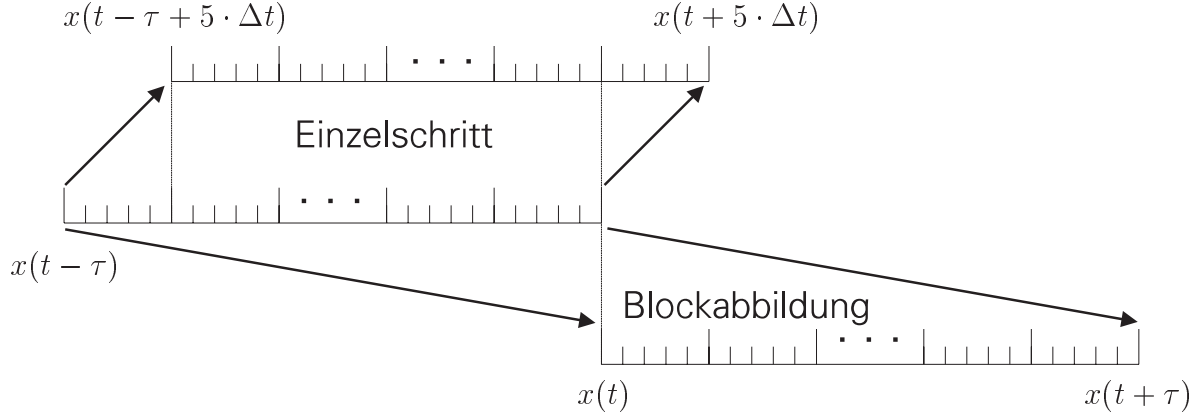


Abbildung 9: Die Abbildung zeigt ein Beispiel für die beiden Ansätze zur Beschreibung der zeitlichen Entwicklungen eines Delay-Systems, welches mit der Dimension $N_R < N$ angenähert wird. Die Integrationsschrittweite Δt ist dabei von der Dimension N entkoppelt.

In Abbildung 9 sehen wir ein Beispiel, in dem nur jeder 5-te Wert aus dem Intervall $[x(t - \tau), x(t)]$ als Koordinate verwendet wird. Für ein Delay-System mit diskretem Delay erhält man dann zum Beispiel für $\tau = 24$ und $\Delta t = 0.05$ eine Dimension von $N=481$ und eine reduzierte Dimension von $N_R=97$. Die Jacobi-Matrix des Flusses $\hat{D}\vec{F}$ ist dann anstelle einer 481×481 Matrix nur eine 97×97 Matrix, wodurch sich die Rechenzeit, die für die QR-Zerlegung proportional zu N^3 wächst, stark reduzieren lässt. Die Jacobi-Matrix für den Einzelschritt hat für den Ansatz mit der reduzierten Dimension N_R die folgende Form:

$$\hat{D}\vec{F}^{\Delta t} \Big|_{\vec{x}_R} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \frac{\partial f(x_R, x_R, \tau)}{\partial x_{R, \tau}} \Big|_{x_{R, 1}} \cdot \Delta t & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 + \frac{\partial f(x_R, x_R, \tau)}{\partial x_R} \Big|_{x_{R, N_R}} \cdot \Delta t \end{pmatrix}$$

Die Einträge von $\hat{D}\vec{F}$ müssen nun zusätzlich die Information enthalten, wie sich eine Abweichung $\Delta \vec{x}_R$ von \vec{x}_R über die ausgelassenen Stützstellen hinweg fortpflanzt.

Diese Information ergibt sich aus dem direkten Vergleich der Jacobi-Matrizen für den Ansatz mit der Dimension N und den Ansatz mit der reduzierten Dimension N_R zu:

$$\left. \frac{\partial f(x_R, x_{R,\tau})}{\partial x_{R,\tau}} \right|_{x_{R,1}} = \left(\sum_{i=1}^E \left. \frac{\partial f(x, x_\tau)}{\partial x_\tau} \right|_{x_i(k)} \right) \cdot Z_{1E-1} \text{ und } \left(1 + \left. \frac{\partial f(x, x_\tau)}{\partial x_R} \right|_{x_{R,N_R}} \right) = Z_{1E}$$

Dabei ist $E = \left(\frac{N-1}{N_R-1} \right)$ die Anzahl von Stützstellen, die aufgrund von $N_R < N$ übersprungen werden und Z_{nm} ist in (24) definiert.

Ein bei dieser Erweiterung auftretendes Problem ist der Verlust an Information über die Systemdynamik, der durch das Vernachlässigen von einzelnen Koordinaten entsteht. Dieser Effekt wird ähnlich bei der Delayeinbettung zum Rekonstruieren eines Ersatz-Phasenraums beobachtet, wenn mit einer zu geringen Dimension eingebettet wird. Durch Anwendung des Verfahrens der EOF-Zerlegung kann dieser Nachteil im allgemeinen kompensiert werden.

3.3.3 Verwendung der EOF-Zerlegungsmethode

Eine weitere Verbesserung, welche die Dimension des Delaysystems reduziert, aber gleichzeitig die für die Dynamik relevante Information in die verminderte Anzahl von Koordinaten überträgt, verwendet empirische orthogonale Funktionen, auf die schon in Kapitel 2.3.2 eingegangen wurde.

Das EOF-Koordinatensystem wird aus der Korrelationsmatrix (7) bestimmt, die aus den M Datenvektoren:

$$\vec{x}_i = (x(t_0 + (i-1) \cdot \tau), x(t_0 + (i-1) \cdot \tau + \Delta t), \dots, x(t_0 + i \cdot \tau - \Delta t), x(t_0 + i \cdot \tau))$$

berechnet wird, welche dann auch bei der Berechnung der Lyapunov-Exponenten verwendet werden. Mit den Eigenvektoren (e_i^1, \dots, e_i^N) der Korrelationsmatrix erhält man die Transformationsmatrix \hat{T} :

$$\hat{T} = \begin{pmatrix} e_1^1 & e_1^2 & \dots & e_1^N \\ e_2^1 & e_2^2 & \dots & e_2^N \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ e_N^1 & e_N^2 & \dots & e_N^N \end{pmatrix}$$

Von den durch Projektion in das EOF-Koordinatensystem erhaltenen Vektoren \vec{x}_{eof} verwenden wir nur die ersten N_{eof} Komponenten:

$$\vec{x}_{eof} = \hat{T} \cdot \vec{x} \Rightarrow \vec{x}^* = (x_{eof,1}, \dots, x_{eof,N_{eof}})$$

Um die Jacobi-Matrix des Flusses in EOF-Koordinaten anzugeben, wenn sie im ursprünglichen Koordinatensystem gegeben ist, müssen wir folgende Zusammenhänge

berücksichtigen:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f_{eof}^\ell}{\partial x_{eof,j}} &= \frac{\partial \left(\sum_{k=1}^N e_k^\ell \cdot f^k \right)}{\partial x_{eof,j}} = \sum_{k=1}^N e_k^\ell \cdot \frac{\partial f^k}{\partial x_{eof,j}} \\ \Rightarrow \frac{\partial f_{eof}^\ell}{\partial x_{eof,j}} &= \sum_{k=1}^N e_k^\ell \cdot \left[\left(\sum_{i=1}^N \frac{\partial f^k}{\partial x_i} \cdot e_i^j \right) \right] \text{ mit } \ell, j = 1, \dots, N_{eof}\end{aligned}$$

Für die anschließende QR-Zerlegung erhält man dann eine $N_{eof} \times N_{eof}$ -Matrix anstelle einer $N \times N$ -Matrix.

Eine Kombination von den in den beiden letzten Abschnitten beschriebenen Erweiterungen zur Verminderung der Dimension des Delaysystems, vereinigt die Vorteile von beiden Verfahren. Dies resultiert in einer Reduzierung der Rechenzeit bei gleichbleibender Genauigkeit der Berechnung innerhalb gewisser Grenzen.

Das Konzept der lokalisierten Lyapunov-Exponenten aus Abschnitt 3.2 ist ohne Änderungen auch auf Delaysysteme übertragbar. Nach der Wahl der Einstellungen von Δt , N_R und N_{eof} , die zur Berechnung der globalen Lyapunov-Exponenten getroffen werden müssen, ergeben sich die lokalisierten Lyapunov-Exponenten direkt aus Gleichung (15). Um eine kontinuierliche Darstellung zu erhalten, muß man das Einzelschritt-Verfahren verwenden, welches das System in jedem Schritt um die kleine Integrationszeit Δt voranschiebt.

Der folgende Abschnitt beschäftigt sich mit der Bestimmung von Lyapunov-Exponenten aus experimentellen Zeitreihen. Das dort vorgestellte Verfahren ermöglicht dann die Charakterisierung experimenteller BSN-Zustände durch Lyapunov-Exponenten.

3.4 Lyapunov-Exponenten aus experimentellen Zeitreihen

In den vorangegangenen Abschnitten haben wir gesehen, wie sich Lyapunov-Exponenten exakt aus den der Dynamik zugrundeliegenden Differentialgleichungen berechnen lassen. Systeme, deren dynamisches Verhalten nur in Form von experimentellen Zeitreihen gegeben ist, erfordern zur Bestimmung der Lyapunov-Exponenten eine andere Vorgehensweise [47–49, 67, 68].

Die Grundlage für die Anwendbarkeit unseres Verfahrens zur Bestimmung von Lyapunov-Exponenten aus experimentellen Zeitreihen ist die für BSN typische Attraktor-Dimension im Bereich von Null (stabiler Fixpunkt) bis etwa Sechs (chaotischer Zustand). Ein hochdimensionaler Attraktor wird bei zu niedrigdimensionaler Betrachtung als zufällige Dynamik interpretiert. Die in solchen Fällen abgeschätzten Lyapunov-Exponenten besitzen dann keine Aussagekraft mehr im ursprünglichen Sinne. Eine zu niedrigdimensionale Betrachtung ergibt sich im allgemeinen durch eine unzureichende, zu niedrigdimensionale Einbettung bei der Rekonstruktion eines Ersatz-Phasenraums.

3.4.1 Rekonstruktion der Dynamik

Die experimentellen BSN-Zeitreihen, die für Untersuchungen zu Lyapunov-Exponenten verwendet werden, sind, wie schon in Kapitel 2.2 dargelegt, skalare Meßreihen der elektrischen Leitfähigkeit von BSN-Kristallen. Die Rekonstruktion der Dynamik erfolgt durch das Verfahren der Delayeinbettung in Verbindung mit der Methode der EOF-Zerlegung aus Kapitel (2.3).

Um möglichst die gesamte Information aus dem Bereich $[x(t - \tau \cdot d_E), x(t)]$ zur Charakterisierung des Zustandes $\vec{x}(t)$ zu verwenden, ist es sinnvoll, bei der Wahl des Einbettungsfensters $\tau \cdot d_E$, ein kleines τ und eine große Einbettungsdimension d_E anzusetzen. Mit der EOF-Zerlegung lassen sich dann die für die Dynamik aussagekräftigsten Koordinaten herausprojizieren. Das Einbettungsfenster wählen wir im Bereich einer typischen Periode des Systems. Als eine erste Näherung verwenden wir einen mittleren Attraktorumlauf.

Im folgenden bezeichnet d_E die Einbettungsdimension, die für die EOF-Zerlegung verwendet wird und $d_{Global} \leq d_E$ die Anzahl von Koordinaten mit denen wir die globale Dynamik dann beschreiben. Die globale Dimension ist die Dimension, die wir ansetzen, um den Attraktor im Ersatz-Phasenraum korrekt einzubetten.

Abbildung 10 zeigt die einzelnen Schritte bei der Rekonstruktion der Dynamik nochmal in übersichtlicher Weise. Für die Abschätzung der Jacobi-Matrix des Flusses $\hat{D}\vec{F}$ an lokalen Stellen \vec{x}_i auf dem Attraktor verwendet wir die lokale Dimension $d_{Local} \leq d_{Global}$. Die Unterscheidung zwischen einer globalen und einer lokalen Dimension ist dann sinnvoll, wenn die zur Beschreibung der globalen Dynamik notwendige Dimension d_{Global} größer ist, als die Dimension zur Beschreibung des lokalen Flusses. Dies ist bei Verwendung von Delaykoordinaten zur Rekonstruktion des Ersatz-Phasenraums im allgemeinen immer der Fall [47,48].

3.4.2 Abschätzung der Jacobi-Matrix des Flusses

Der wesentliche Schritt nach der Rekonstruktion des Ersatz-Phasenraums besteht in der Abschätzung der Jacobi-Matrix des Flusses entlang der Trajektorie. Zu diesem Zweck suchen wir die nächsten Nachbarn $\vec{x}_{Nachbar,i}^{(j)}$ zum jeweiligen Trajektorienpunkt $\vec{x}_i = \vec{x}(t_i)$.

Aus der Kenntnis von $\vec{e}_i^{(j)} = (\vec{x}_{Nachbar,i}^{(j)} - \vec{x}_i)$ und deren zeitlichen Entwicklung, $\vec{e}_{i+T}^{(j)} = (\vec{x}_{Nachbar,i+T}^{(j)} - \vec{x}_{i+T})$ nach der Zeit T mit $T \in \mathbb{N}$, läßt sich $\hat{D}\vec{F}|_{\vec{x}_i}$ unter Ausnutzung des Zusammenhanges aus Gleichung (10) mit der Methode der kleinsten Quadrate abschätzen.

Abbildung 11 zeigt die zeitliche Entwicklung von 5 Nachbarn eines Trajektorienpunktes \vec{x}_i . In diesem Beispiel werden die nächsten Nachbarn in einer Kugelschale $r_{min} \leq r \leq r_{max}$ gesucht, um Rauscheinflüssen vorzubeugen [47,48]. Bei der Nachbarsuche ergibt sich eine wesentliche Zeitersparnis, wenn anstelle der euklidischen

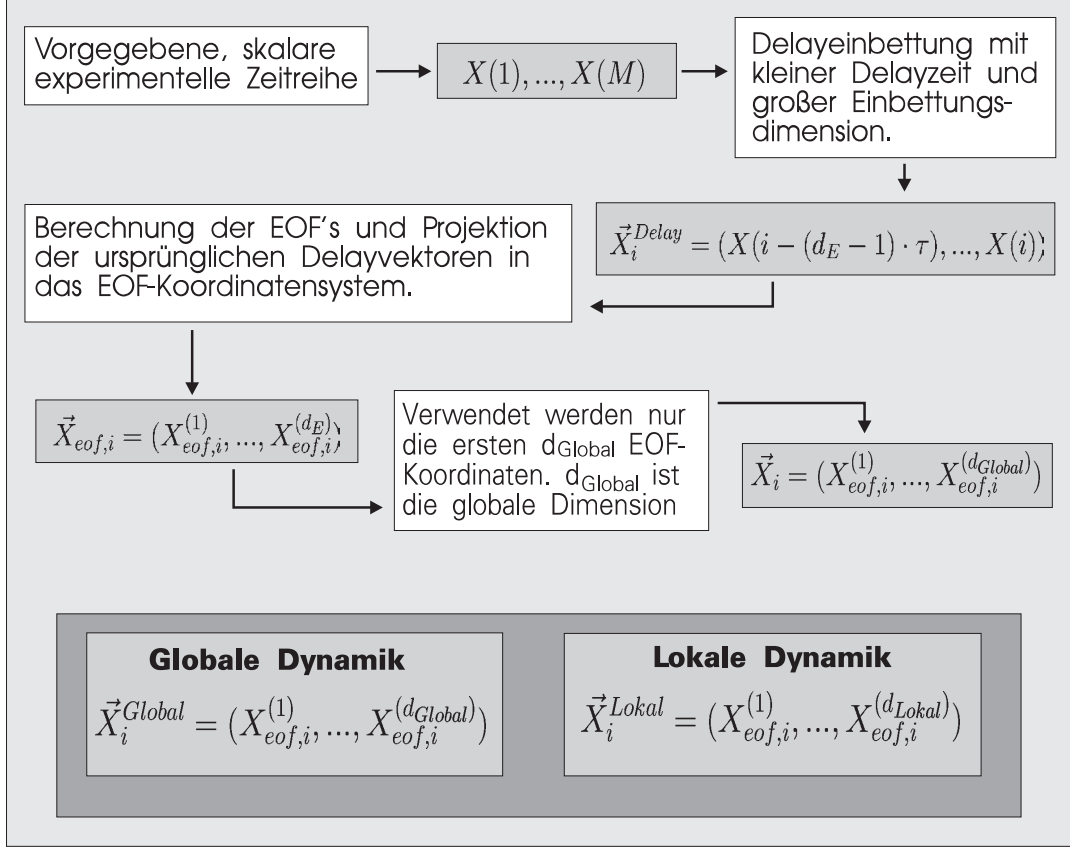


Abbildung 10: Rekonstruktion der Dynamik aus einer vorgegebenen, skalaren, experimentellen Zeitreihe.

Norm (17), die Maximums-Norm (25) verwendet wird.

$$\|\vec{x}\|_{Max} = \max \{x_i \mid i = 1, \dots, d_{Global}\} \quad (25)$$

Für unsere Untersuchungen werden wir deshalb anstelle von Kugelschalen, Würfelschalen verwenden.

Neben der Entwicklungszeit T , muß auch die Ordnung der Taylor-Entwicklung [51] für die Approximation des Flusses $\vec{F}_{\vec{x}_i}^T$ eingestellt werden. Mit wachsender Taylor-Ordnung L_{Taylor} wird man eine bessere Approximation erwarten. Wir wählen L_{Taylor} im allgemeinen zwischen erster und dritter Ordnung.

Die Mindestanzahl von Nachbarn $N_{Nachbar}^{(min)}$, die für die Anwendbarkeit der Methode der kleinsten Quadrate gefunden werden muß, ist in Abhängigkeit von der lokalen Dimension d_{Lokal} und der Taylor-Ordnung L_{Taylor} durch folgenden Zusammenhang gegeben [48]:

$$N_{Nachbar}^{(min)} = \left(\prod_{k=1}^{L_{Taylor}} \frac{d_{Lokal} + k}{k} \right) - 1$$

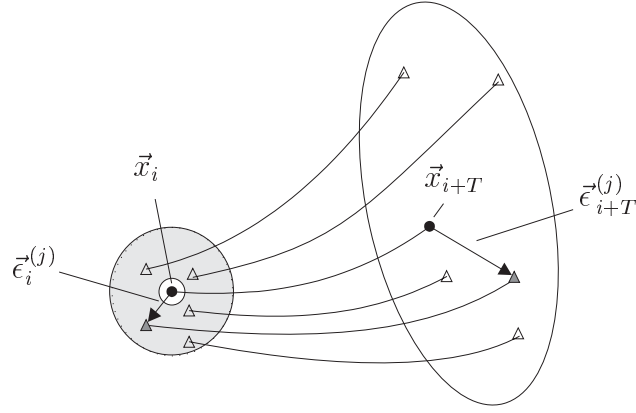


Abbildung 11: Zeitliche Entwicklung von 5 Nachbarn, die innerhalb der grau unterlegten Kugelschale $r_{min} \leq r \leq r_{max}$ um den Trajektorienpunkt \vec{x}_i gefunden werden.

Das starke Anwachsen der Mindestanzahl von Nachbarn mit der Taylor-Ordnung wird in Tabelle 2 dargestellt.

Taylor-Ordnung L_{Taylor}	1	2	3	4	5
$N_{Nachbar}^{min}(d_{Lokal} = 3)$	3	9	19	34	55
$N_{Nachbar}^{min}(d_{Lokal} = 6)$	6	27	83	209	463

Tabelle 2: Anwachsen der Mindestnachbaranzahl mit der Taylor-Ordnung.

Zusätzlich werden für eine bessere Statistik bei der Methode der kleinsten Quadrate ca. zweimal so viele Nachbarn gesucht, wie der Mindestanzahl $N_{Nachbar}^{(min)}$ entspricht [47,48]. Für diesen Multiplikator verwenden wir im folgenden die Bezeichnung Statistikfaktor.

Durch das Anwachsen der Nachbaranzahl vergrößert sich der Such-Radius r_{max} . Die sich daraus ergebende Verschlechterung der Approximation des Flusses $\vec{F}_{\vec{x}_i}^T$ wird durch die höhere Ordnung L_{Taylor} im allgemeinen nicht mehr ausgeglichen. Die Verwendung von $L_{Taylor} > 1$ wenden wir deswegen nur für genügend lange Datenreihen an, da diese eine ausreichende Anzahl von Nachbarn innerhalb eines vernünftigen Radius r_{max} aufweisen. Im Rahmen unserer Untersuchungen hat sich ein Grenzwert für den Maximalradius r_{max} von 5% des Attraktordurchmessers $d_{Attraktor}$ als sinnvoll erwiesen.

Lassen sich die Jacobi-Matrizen des Flusses $\hat{D}\vec{F}^T|_{\vec{x}_i}$ zufriedenstellend bestimmen, so werden die Lyapunov-Exponenten mit der in Abschnitt 3.1.1 beschriebenen Methode der QR-Zerlegung berechnet.

Das gesamte Verfahren ist noch einmal schematisch in Abbildung 12 dargestellt.

Das wichtigste und gleichzeitig schwächste Glied ist die Bestimmung der geeigneten nächsten Nachbarn.

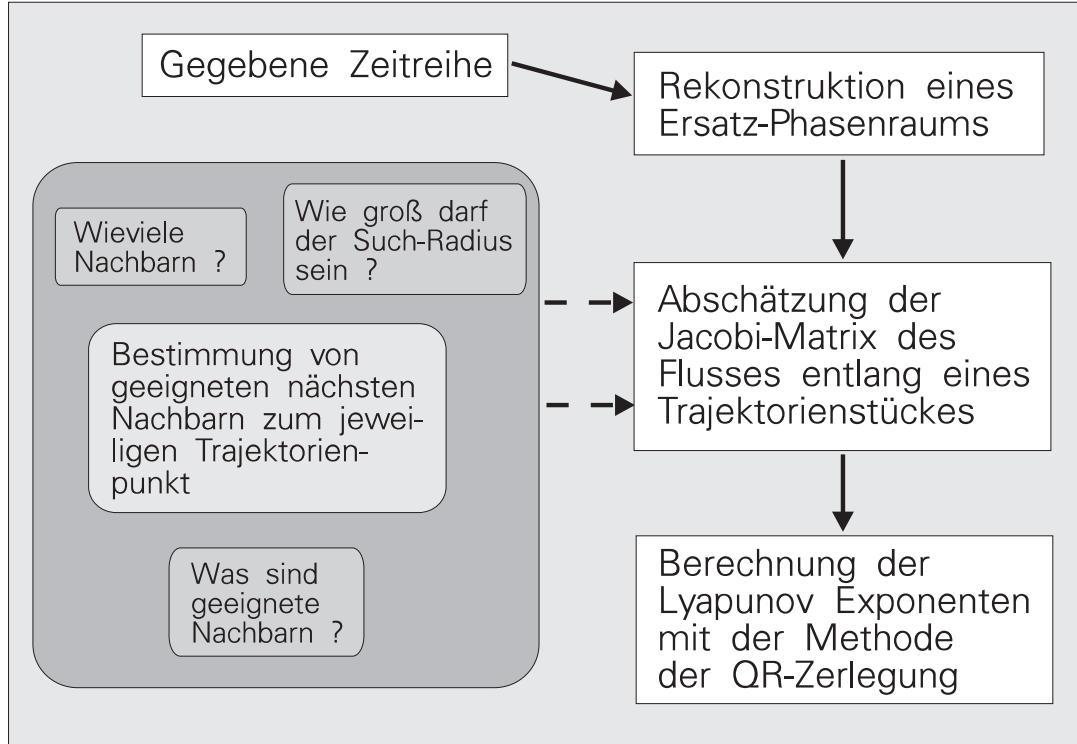


Abbildung 12: Schematische Darstellung des Verfahrens zur Bestimmung von Lyapunov-Exponenten aus experimentellen Zeitreihen. Die kritische Stelle ist die Bestimmung von geeigneten nächsten Nachbarn von \vec{x}_i .

Schon das Auffinden der nächsten Nachbarn zu einem Punkt \vec{x}_i ist bei großen Datensätzen sehr zeitintensiv und aus diesem Grund keine triviale Angelegenheit. Wir sortieren die Datenvektoren \vec{x}_i deswegen nach der Größe ihrer ersten Komponente $x_{i,1}$ vor und erhalten dadurch die bijektive Abbildung $P: i \rightarrow s_i$ mit $i, s \in [1, \dots, M]$. Anschaulich besagt diese, daß der Trajektorienpunkt i die s_i -kleinste erste Komponente besitzt.

Die Inverse von P beschreibt dann die Umkehrabbildung $P^{-1}: s \rightarrow i_s$. Es gilt der Zusammenhang: $P^{-1}(P(i)) = i$. Zur Vorsortierung wird der Shellsort-Algorithmus verwendet [69].

Durch diese Vorsortierung erhalten wir zu einem gegebenem Trajektorienpunkt \vec{x}_i eine schnelle Vorauswahl von potentiellen nächsten Nachbarn $\vec{x}_{Nachbar,i}^{(j)}$. Sollen die Nachbarn innerhalb eines Radius $r = r_{max}$ liegen, so genügt es, nur die $N_N = N_{N+} + N_{N-}$ Nachbarn zu betrachten, welche folgende Bedingung erfüllen [47]:

$$\begin{aligned} x_{P^{-1}(s_i+k)} - x_{i,1} &\leq r_{max} \quad \forall k \in \mathbb{N} \text{ mit } k \leq N_{N+} \\ x_{i,1} - x_{P^{-1}(s_i-k)} &\leq r_{max} \quad \forall k \in \mathbb{N} \text{ mit } k \leq N_{N-} \end{aligned}$$

Bei der Prüfung, ob die potentiellen Nachbarn auch wirklich nächste Nachbarn sind, wird bei Benutzung der Maximums-Norm (25) die Bedingung: $|x_{P^{-1}(s_i+k)} - x_{i,j}| \leq r_{max}$ für alle restlichen Komponenten $j=2,...,d_{Global}$ und alle potentiellen Nachbarn mit $k \in \mathbb{Z}/\{0\}$ und $-N_{N-} \leq k \leq N_{N+}$ getestet.

Prinzipiell wäre es gleichgültig, nach welcher Komponente vorsortiert wird. Durch die Wahl des EOF-Koordinatensystems bei der Rekonstruktion des Ersatz-Phasenraums ist es jedoch sinnvoll, die erste Koordinate zu verwenden, da sie im Mittel die größte Energie enthält.

3.4.3 Probleme und deren Handhabung

Im vorangegangenen Abschnitt haben wir gesehen, daß die Suche von geeigneten Nachbarn zur Abschätzung der Jacobi-Matrix des Flusses, der kritische Punkt des gesamten Verfahrens ist. Im folgenden sollen die am wichtigsten erscheinenden Probleme, die bei der Nachbarsuche auftreten können, kurz angesprochen werden.

Der Such-Radius darf nicht so groß sein, daß die Approximation des Flusses mit einer Taylor-Entwicklung geringer Ordnung ($1 \leq L_{Taylor} \leq 3$) keine gültige Näherung mehr darstellt. Auf der anderen Seite müssen in Abhängigkeit von der lokalen Dimension, der Taylor-Ordnung und dem Statistikfaktor genügend Nachbarn gefunden werden, um die Methode der kleinsten Quadrate anwenden zu können.

Als erste Richtlinie orientieren wir uns immer an einer oberen Grenze des Maximalradius von $r_{max} \leq 0.05 \cdot d_{Attraktor}$. Für die Taylor-Ordnung werden wir in den meisten Fällen $L_{Taylor} = 1$ verwenden, so daß für eine Reduzierung einer zu hohen Nachbaranzahl nur noch die lokale Dimension und der Statistikfaktor zur Verfügung stehen. Der Statistikfaktor sollte mindestens 2 betragen [47] und die lokale Dimension sollte nicht kleiner als die erwartete Attraktor-Dimension sein, die zum Beispiel mit dem Grassberger-Procaccia-Algorithmus [30] abgeschätzt werden kann.

Treten trotz Verwendung aller Minimaleinstellungen immer noch Fehler bei der Nachbarsuche auf, so wenden wir das Verfahren in der Regel nicht auf die entsprechende Zeitreihe an, da wir sonst keine zuverlässige Abschätzung der Lyapunov-Exponenten gewährleisten können.

Bei der Beurteilung von Fehlern bei der Nachbarsuche erkennen wir verschiedene Fälle. Neben dem Auffinden von zu wenigen Nachbarn ist auch das Auftreten von exakt gleichen Punkten und die Identifikation von 'Geisterfahrern', die in Abbildung 13 anschaulich dargestellt sind, eine mögliche Fehlerquelle. Exakt gleiche Punkte deuten genauso auf eine zu niedrigdimensionale Einbettung hin, wie zuviele 'Geisterfahrer' [70]. Darüberhinaus wird man auch bei einem zu großen Such-Radius zuviele 'Geisterfahrer' finden, da verschiedene dynamische Bereiche des Attraktors dann innerhalb einer Kugelschale liegen können.

Die Erkennung von 'Geisterfahrern' kann einfach durch Vergleich der Flußrichtungen von Ausgangspunkt und Nachbar erfolgen:

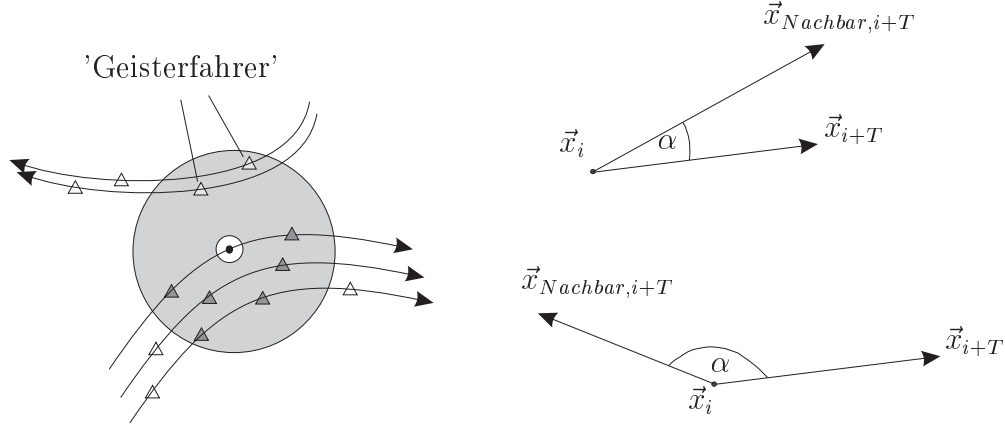


Abbildung 13: Links: Auftreten von 'Geisterfahrern' bei zu großer Wahl des Such-Radius oder bei schlechter Einbettung. Rechts: Erkennung von 'Geisterfahrern' durch Vergleich der Flußvektoren des Ausgangspunktes \vec{x}_i und des Nachbarn $\vec{x}_{Nachbar,i+T}$.

$$\cos(\alpha) = \frac{(\vec{x}_{i+T} - \vec{x}_i) \cdot (\vec{x}_{Nachbar,i+T}^{(j)} - \vec{x}_i)}{|\vec{x}_{i+T} - \vec{x}_i| \cdot |\vec{x}_{Nachbar,i+T}^{(j)} - \vec{x}_i|} \quad (26)$$

Bei der Bestimmung geeigneter Nachbarn identifizieren wir 'Geisterfahrer' mit Gleichung (26), wobei wir den Wert von $\cos(\alpha)$ als Einstellparameter verwenden.

Die Fehler, die bei der Nachbarsuche auftreten, werden im allgemeinen nur an lokalen Stellen auf dem Attraktor beobachtet. Der Hauptgrund dafür, sind neben eventuellen Meßfehlern, die Randbereiche des Attraktors, in denen sich naturgemäß weniger Nachbar finden lassen, als zum Beispiel in stark bevölkerten Attraktor-Bereichen.

Bei der Berechnung der Jacobi-Matrix des Flusses entlang eines Trajektorienstückes versuchen wir deshalb diese Randbereiche zu meiden. Wir verwenden drei Fragestellungen, um Auskunft über die Art der Nachbarschaft von Punkten auf dem Attraktor zu erhalten.

- 1) Wie groß ist der Radius $R_{Nachbarn}$, in dem sich die geforderte Anzahl nächster Nachbarn finden läßt ? Oder lassen sich innerhalb des vorgegebenen Maximalradius r_{max} gar nicht genügend Nachbarn finden ?
- 2) Wie groß ist der Abstand d_{sp} vom Trajektorienpunkt zum Schwerpunkt der gefundenen Nachbarn ? Man wird eine um so bessere Näherung für den Fluß erwarten, je kleiner dieser Abstand ist, d.h. je gleichmäßiger die Nachbarn um den Trajektorienpunkt verteilt sind [46].
- 3) Wie groß ist der mittlere quadratische Fehler f_ϵ zwischen der zeitlichen Ent-

wicklung der Abweichungen $\vec{\epsilon}_i$ nach den Meßdaten und nach der approximierten Jacobi-Matrix des Flusses ?

$$f_\epsilon = \frac{1}{N_{Nachbar}} \sum_{i=1}^{N_{Nachbar}} \left| \vec{\epsilon}_{i+T}^{(j)} - \hat{D}\vec{F}|_{\vec{x}_i} \cdot \vec{\epsilon}_i^{(j)} \right|^2$$

Randbereiche des Attraktors sind durch einen großen Radius $R_{N_{Nachbar}}$, einen großen Abstand d_{sp} und einen großen Fehler f_ϵ charakterisiert. Sie lassen sich durch diese Größen identifizieren und können so, wenn es notwendig erscheint, für die Berechnung der Lyapunov-Exponenten gemieden werden.

Das Vernachlässigen eines ganzen Attraktor-Bereiches, zum Beispiel eines Randbereiches, kann natürlich den Verlust eines charakteristischen Beitrages zum globalen Lyapunov-Exponenten zur Folge haben. Aus Erfahrung wissen wir, daß sich dieser Beitrag für Randbereiche selten so genau bestimmen läßt, daß er nicht eine Verschlechterung bei der Abschätzung der Lyapunov-Exponenten darstellen würde.

Die Berechnung der Lyapunov-Exponenten mit der Methode der QR-Zerlegung enthält in jedem Schritt die Information über die Drehung des begleitenden Koordinatensystems. Das Auslassen von einzelnen Punkten aufgrund von Fehlern bei der Nachbarsuche verfälscht diese Information, besonders dann, wenn mehrere solcher Punkte hintereinanderliegen und ausgelassen werden müssen.

Wir halten es deswegen für sinnvoll, daß keine oder nur sehr wenige ($< 0.1\%$) Punkte ausgelassen werden sollten, um eine aussagekräftige Abschätzung von Lyapunov-Exponenten aus experimentellen Zeitreihen zu gewährleisten.

Die in diesem Kapitel vorgestellten Verfahren erlauben es, Lyapunov-Exponenten aus experimentellen BSN-Zeitreihen und aus der BSN-Modellgleichung zu bestimmen. Im nächsten Kapitel wollen wir die Ergebnisse betrachten, die sich aus der Anwendung dieser Methoden ergeben.

4 Ergebnisse

In den folgenden vier Abschnitten wollen wir die Ergebnisse unserer Untersuchungen zum Thema Lyapunov-Exponenten beim BSN-System vorstellen. Der erste Abschnitt beschäftigt sich mit den globalen Lyapunov-Exponenten, die wir aus experimentellen BSN-Zeitreihen bestimmen. Zur Überprüfung unseres Verfahrens führen wir Testuntersuchungen an bekannten Modellsystemen durch, von denen die Lyapunov-Exponenten numerisch ermittelt werden können. Dabei betrachten wir verschieden stark verrauschte Zeitreihen, um den Einfluß von Rauschen auf die Abschätzung der Lyapunov-Exponenten zu erkennen.

Im zweiten Abschnitt behandeln wir die Ergebnisse zu lokalisierten Lyapunov-Exponenten aus BSN-Zeitreihen. Dazu verwenden wir, abhängig vom speziellen Attraktortyp, verschiedene Methoden für eine übersichtliche Darstellung.

Diese Darstellungsformen werden wir im dritten Abschnitt unter anderem nutzen, um das charakteristische Verhalten von Lyapunov-Exponenten entlang einer RTN-Route ins Chaos zu beschreiben. Durch die Betrachtung des größten lokalisierten Lyapunov-Exponenten von 8 ausgewählten BSN-Zeitreihen dieser RTN-Route erhalten wir tiefere Einblicke in die Dynamik des BSN-Systems im Ersatz-Phasenraum.

Der vierte und letzte Abschnitt dieses Kapitels behandelt die Ergebnisse, die sich aus Simulationen mit der BSN-Modellgleichung ergeben. Auch hier testen wir den verwendeten Algorithmus an einem bekannten Modellsystem, bevor wir die Lyapunov-Exponenten aus der BSN-Modellgleichung berechnen und Vergleiche mit experimentellen, periodischen Zuständen durchführen.

4.1 Globale Lyapunov-Exponenten aus BSN-Zeitreihen

Zur Überprüfung unseres Algorithmus zur Abschätzung von Lyapunov-Exponenten aus experimentellen Zeitreihen, bestimmen wir Lyapunov-Exponenten aus numerisch erzeugten, skalaren Zeitreihen von chaotischen Zuständen verschiedener Modellsysteme, die wir auch in Tabelle 1 betrachtet haben. Wir verwenden die gleichen Parametereinstellungen, so daß die Werte aus der Tabelle die korrekten Lyapunov-Exponenten angeben.

Die zum Testen eingesetzten Zeitreihen sind alle mit weißem, additivem Rauschen versehen. Der Rauschpegel R_p wird im folgenden in Prozent der Maximalamplitude z der betrachteten Größe $\{x_i\}$ mit $i=1,\dots,M$ ausgedrückt. Bei einem Rauschpegel von p [%] berechnen wir die verrauschte Zeitreihe $\{x_i^{(R)}\}$ aus der Originalzeitreihe $\{x_i\}$ in folgender Weise:

$$x_i^{(R)} = x_i + (\eta - \frac{1}{2}) \cdot z \cdot \frac{p}{100} = x_i \pm \left(\frac{R_p}{2}\right)$$

η ist dabei eine reelle Zufallszahl aus dem Intervall $[0,1]$.

Bei Benutzung eines Rauschpegels von 0.00% ist die Genauigkeit der numerisch

erzeugten Zeitreihe durch die Darstellungsgenauigkeit des verwendeten Computers gegeben. Diese für experimentelle Zeitreihen unrealistische Annahme resultiert im allgemeinen in einer Herabsetzung der für die Einbettung notwendigen globalen Dimension. Die Lyapunov-Exponenten lassen sich dann sehr viel genauer abschätzen. Diese Untersuchungen eignen sich jedoch nicht, um Aussagen über Abschätzungen aus experimentellen Zeitreihen zu erhalten. Wir halten es deswegen für sinnvoll, praktisch rauschfreie Zeitreihen mit einem geringen Rauschpegel von 0.01% zu simulieren.

In Abbildung 14 sehen wir den Einfluß von weißem, additivem Rauschen auf die Abschätzung der beiden größten Lyapunov-Exponenten des Lorenz- und des Rössler-Modells.

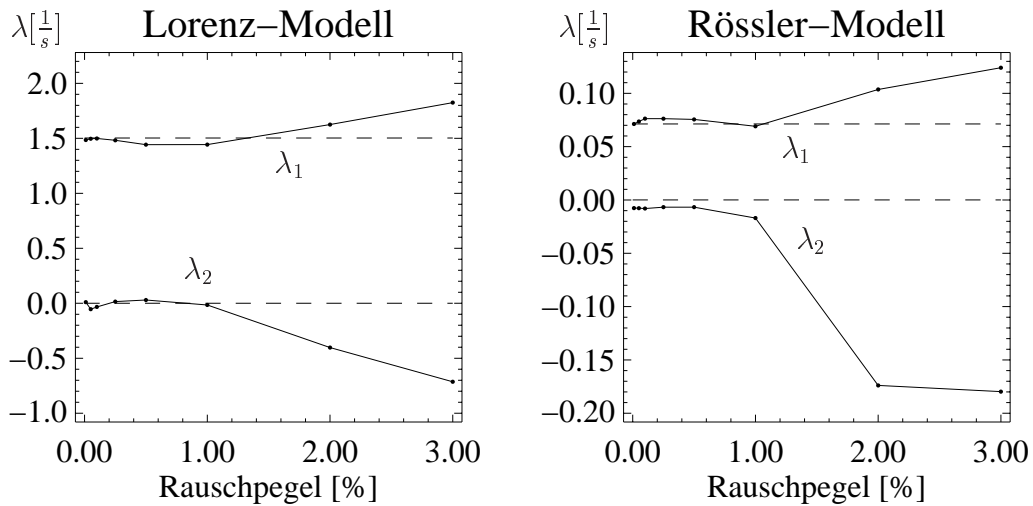


Abbildung 14: Testen des Algorithmus zur Abschätzung von Lyapunov-Exponenten aus unterschiedlich stark verrauschten Zeitreihen. Dargestellt sind die Abschätzungen der beiden größten Lyapunov-Exponenten für das Lorenz- und das Rössler-Modell. Die gestrichelten Linien kennzeichnen die korrekten Werte. Die verwendeten Rauschpegel R_p sind 0.01, 0.05, 0.1, 0.25, 0.5, 1.0, 2.0 und 3.0 %. Die Berechnungen werden mit den Einstellungen $d_{Local}=5$, $d_{Global}=12$ und $N_{Nachbar}=14$ durchgeführt. Wir sehen, daß sich der größte Lyapunov-Exponent für diese Modellsysteme bis zu einem Rauschpegel von $R_p = 1\%$ bis auf ca. 7% genau bestimmen läßt.

Eine interessante Frage bezüglich der globalen BSN-Dynamik ist die Anzahl der positiven Lyapunov-Exponenten von chaotischen BSN-Zuständen. Diese sind ein Maß dafür, wieviele Freiheitsgrade zu der chaotischen Bewegung beitragen. Um herauszufinden, wie zuverlässig sich ein zweiter positiver Lyapunov-Exponent aus einer experimentellen Zeitreihe bestimmen läßt, betrachten wir das Hyperrössler- und das Mackey-Glass-Modell bei typischen Parametereinstellungen, die zwei positive

Lyapunov-Exponenten generieren. Wir verwenden auch hier die selben Parameter-einstellungen, wie in Tabelle 1 und schätzen die Lyapunov-Exponenten für verschiedene Rauschpegel im Bereich von 0.01% bis 1.5% ab.

In Abbildung 15 sehen wir die Resultate dieser Untersuchungen. Eine vernünftige Abschätzung der beiden größten Lyapunov-Exponenten kann nur für einen Rauschpegel von $R_p < 0.05\%$ durchgeführt werden. Die positiven Lyapunov-Exponenten des Mackey-Glass-Modells sind von Natur aus sehr gering, so daß eine zuverlässige Abschätzung nur für eine ausreichend große Datenanzahl durchgeführt werden kann. Wir verwenden bei dem Mackey-Glass-Modell 99000 und bei dem Hyperrössler-Modell 90000 Datenpunkte. Die beiden Lyapunov-Exponenten des Hyperrössler-Modells liegen etwa in der Größenordnung, die wir später auch bei BSN-Zeitreihen beobachten werden.

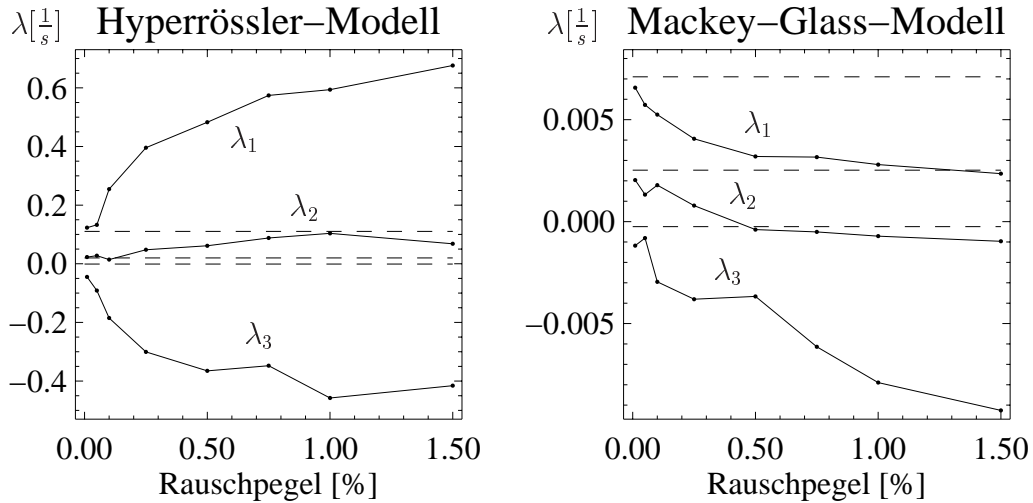


Abbildung 15: Testen des Algorithmus bezüglich der Erkennung von zwei positiven Lyapunov-Exponenten aus verrauschten Zeitreihen. Dargestellt sind die Abschätzungen der drei größten Lyapunov-Exponenten für das Hyperrössler- und das Mackey-Glass-Modell. Die korrekten Werte sind als gestrichelte Linien eingezeichnet. Die verwendeten Rauschpegel R_p sind 0.01, 0.05, 0.1, 0.25, 0.5, 0.75, 1.0 und 1.5 %. Für die Berechnungen verwenden wir folgende Einstellungen: $d_{Lokal}=7$, $d_{Global} \in \{7, 10, 14, 15\}$ und $N_{Nachbar}=18$ beim Hyperrössler-Modell und $d_{Lokal}=6$, $d_{Global}=10$ und $N_{Nachbar}=30$ beim Mackey-Glass-Modell. Wir erkennen, daß die Abschätzungen für diese Modellsysteme mit zwei positiven Lyapunov-Exponenten nur für einen geringen Rauschpegel zuverlässig durchgeführt werden können.

Die Rauschpegel der BSN-Zeitreihen, die wir in den folgenden Untersuchungen betrachten werden, liegen im Bereich von $R_p < 0.02\%$, so daß wir eine zuverlässige Abschätzung eines zweiten positiven Lyapunov-Exponenten erwarten können.

Schließlich betrachten wir noch, wie genau wir Lyapunov-Exponenten von periodischen Zuständen bestimmen können. Wir erwarten, daß der größte Lyapunov-Exponent, der für periodische Zustände exakt Null sein sollte, schwach positiv sein wird. Anschaulich ist dies dadurch verständlich, daß Rauschen und die Auswirkungen einer nicht exakten Fluß-Approximation, Abweichungen vom periodischen Orbit vortäuschen und im Mittel einen schwach positiven Lyapunov-Exponenten zur Folge haben. Liegt dieser dann innerhalb des Bereiches, in dem auch der größte positive Lyapunov-Exponent des Systems typischerweise vorkommt, so kann eine Unterscheidung zwischen $\lambda_1 = 0$ und $\lambda_1 > 0$ nicht vorgenommen werden.

Die Ergebnisse aus Abbildung 16 zeigen, daß der größte Lyapunov-Exponent sehr viel schlechter abgeschätzt werden kann, als bei chaotischen Zuständen mit vergleichbaren Rauschpegeln (Abbildung 14).

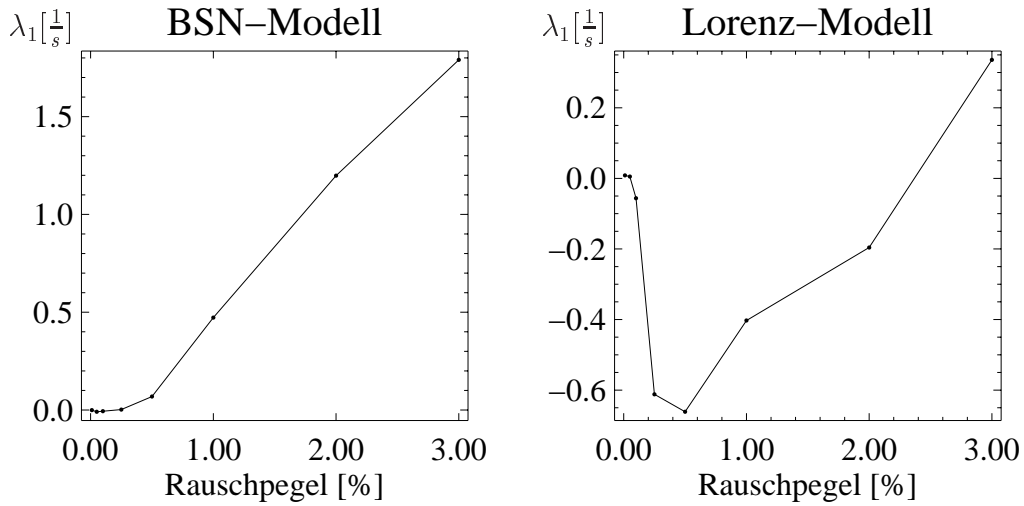


Abbildung 16: Testen des Algorithmus bezüglich der Abschätzung des größten Lyapunov-Exponenten eines periodischen Zustandes in Abhängigkeit von verschieden starken Rauschpegeln. Die Untersuchungen werden mit der BSN-Modellgleichung und dem Lorenz-Modell durchgeführt. Die verwendete Rauschpegel R_p sind 0.01, 0.05, 0.1, 0.25, 0.5, 0.75, 1.0 und 1.5 %. Die Berechnungen werden mit den Einstellungen $d_{Lokal}=3$, $N_{Nachbar}=10$ und $d_{Global}=3$ beim BSN-Modell bzw. $d_{Global}=5$ beim Lorenz-Modell durchgeführt. Wir sehen, daß sich der größte Lyapunov-Exponent für periodische Zustände nur für einen geringen Rauschpegel zuverlässig abschätzen läßt.

Die uns vorrangig interessierenden globalen Lyapunov-Exponenten beim BSN-System beziehen sich auf quasiperiodische und chaotische Zustände. Die Identifizierung periodischer Zustände kann in einfacher Weise mit anderen Methoden, zum Beispiel mit der Fourier-Analyse geschehen. Darüberhinaus ist der größte globale Lyapunov-Exponent eines periodischen Zustandes Null und vermittelt uns in dieser

Form keine neue Information über die System-Dynamik.

Für die Betrachtung lokalisierter Lyapunov-Exponenten und für den Vergleich mit Modellsimulationen liefern die periodischen Zustände jedoch wertvolle Hinweise. Zwei Gründe gestatten es uns trotz der Ergebnisse aus Abbildung 16, Lyapunov-Exponenten von periodischen BSN-Zuständen vernünftig abzuschätzen. Dies sind der geringe Rauschpegel R_p der BSN-Zeitreihen und das Vorhandensein von periodischen Stabilitätsschwankungen der Steuer- und Kontrollgrößen. Wir werden dies ausführlich in Kapitel 5 diskutieren.

Wir wollen uns nun den Ergebnissen zuwenden, die sich aus den Untersuchungen von experimentellen BSN-Zeitreihen ergeben. Dazu verwenden wir als bekannte Vorinformation über die Art der Dynamik Ergebnisse aus vorangegangenen Arbeiten, die mit Hilfe der Fourier-Analyse und dem Grassberger-Procaccia-Algorithmus erhalten wurden [17,21]. Die über den BSN-Zustand bekannte Information ist dann durch die Anzahl der Hauptfrequenzen f_H und die Korrelationsdimension D_2 gegeben.

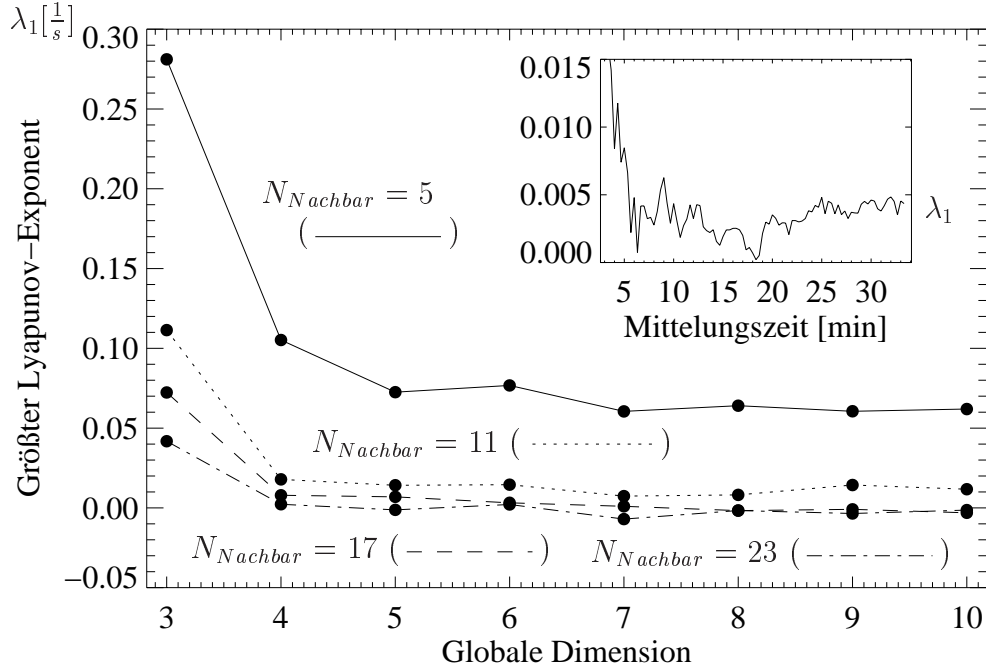


Abbildung 17: Experimenteller periodischer BSN-Zustand mit $f_H = 1$ und $D_2 \approx 1.03$. Aufgetragen ist der größte Lyapunov-Exponent λ_1 mit wachsender globaler Dimension für verschiedene Nachbarkanzen $N_{Nachbar}$. Die restlichen Einstellungen sind: $d_{Lokal}=3$, $T_E=0.2s$, $L_{Taylor} = 1$, $t_{Mittelung}=1000s$, $\tau=0.2s$ und $d_{eof}=76$. Der Berechnung liegen 80000 Datenpunkte zugrunde. Innen: Bestimmung von λ_1 für $d_{Global}=5$, $N_{Nachbar}=30$ und $t_{Mittelung}=2000s$. Wir sehen einen größten Lyapunov-Exponenten, der für eine Wahl von $d_{Global} > 4$ und einer Nachbarkanzenzahl von $N_{Nachbar}=17$ bzw. 23 näherungsweise Null beträgt.

Die Größe T_E bezeichnet im folgenden die Entwicklungszeit, um die wir die zeitliche Entwicklung der Nachbarn bei der Approximation der Jacobi-Matrix des Flusses verfolgen. Wir wählen sie in den meisten Fällen gleich der Samplezeit.

Abbildung 17 zeigt die Konvergenz des größten Lyapunov-Exponenten λ_1 eines periodischen BSN-Zustandes mit wachsender globaler Dimension d_{Global} und wachsender Nachbaranzahl $N_{Nachbar}$. Die große Nachbaranzahl $N_{Nachbar}=30$, die zur Bestimmung von λ_1 bei der Darstellung im kleinen Bild verwendet wird, ist durch die ausreichende Anzahl von geeigneten nächsten Nachbarn gerechtfertigt. Diese ergeben sich als Folge des periodischen Zustandes in Verbindung mit der großen Datenanzahl, die der Abschätzung zugrunde liegt.

Abbildung 18 zeigt die Ergebnisse zur Abschätzung von Lyapunov-Exponenten eines quasiperiodischen BSN-Zustandes. Die beiden größten Lyapunov-Exponenten halten sich mit wachsender globaler Dimension d_{Global} im Bereich von $\lambda_1 \approx 0.011 s^{-1}$ und $\lambda_2 \approx 0.000 s^{-1}$ auf. Die innere Abbildung veranschaulicht, weswegen eine globale Dimension von $d_{Global} \geq 10$ verwendet werden sollte. Für $d_{Global} \geq 10$ wächst der mittlere Maximalradius, innerhalb dessen die geforderete Zahl von Nachbarn $N_{Nachbar}$ gefunden wird, sehr viel langsamer mit der globalen Dimension, als für $d_{Global} < 10$. Die Konvergenz für $d_{Global} \geq 10$ deutet darauf hin, daß die gefundenen Nachbarn echte nächste Nachbarn sind.

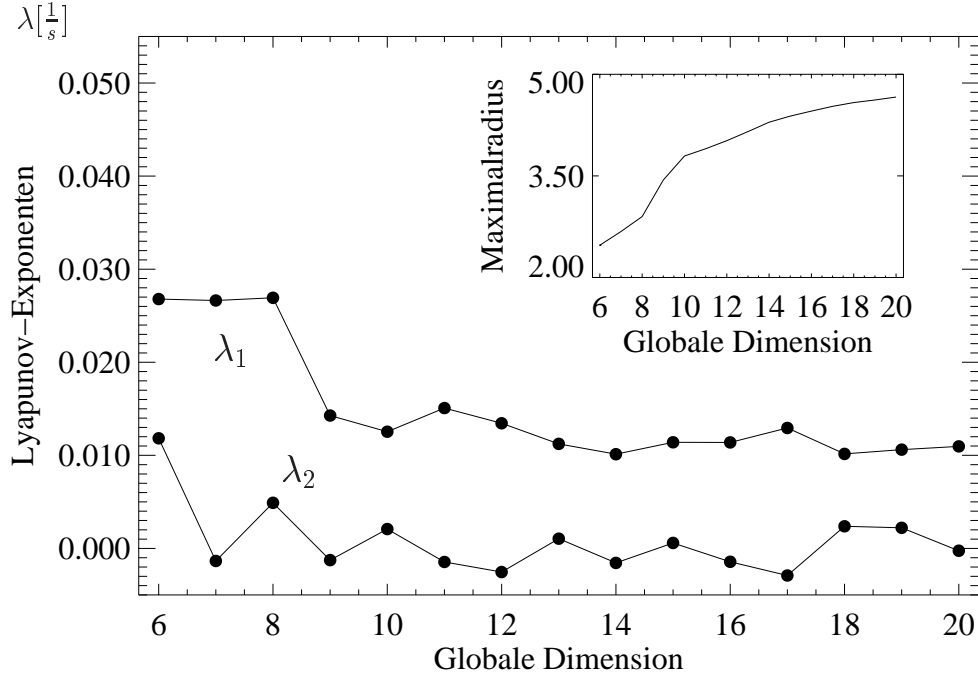


Abbildung 18: Experimenteller BSN-Zustand mit $f_H = 2$ und $D_2 \approx 2.4$ Aufgetragen sind die zwei größten Lyapunov-Exponenten mit wachsender globaler Dimension. Die restlichen Einstellungen sind: $d_{Lokal}=6$, $T_E=0.4s$, $L_{Taylor}=1$, $t_{Mittelung}=2000$ s, $\tau=0.8s$, $d_{eof}=40$ und $N_{Nachbar}=20$. Der Berechnung liegen 90000 Datenpunkte zugrunde. Innen: Mittlerer Maximalradius innerhalb dessen die vorgegebene Anzahl von Nachbarn gefunden wird. Wir können eine zuverlässige Abschätzung von $\lambda_1 \approx 0.01$ und $\lambda_2 \approx 0.00$ erkennen.

In Abbildung 19 ist für den selben BSN-Zustand die Abschätzung der beiden größten Lyapunov-Exponenten mit wachsender Nachbaranzahl $N_{Nachbar}$ aufgetragen. Im kleinen Bild ist das Anwachsen des mittleren Maximalradius mit steigender Nach-

baranzahl $N_{Nachbar}$ dargestellt. Das andeutungsweise erkennbare Plateau zwischen $N_{Nachbar}=26$ und $N_{Nachbar}=28$ gibt uns einen Hinweis auf die Attraktorgeometrie. Trotz steigender Nacharanzahl bleibt der mittlere Maximalradius in diesem Bereich bei etwa konstant 4.7 Skalenteile. Der Attraktordurchmesser beträgt ca. 160 Skalenteile. Wir interpretieren diese Beobachtung als Anzeichen für sehr kleinräumige Strukturen auf dem Attraktor und werden darauf noch einmal in Kapitel 5.1 zu sprechen kommen.

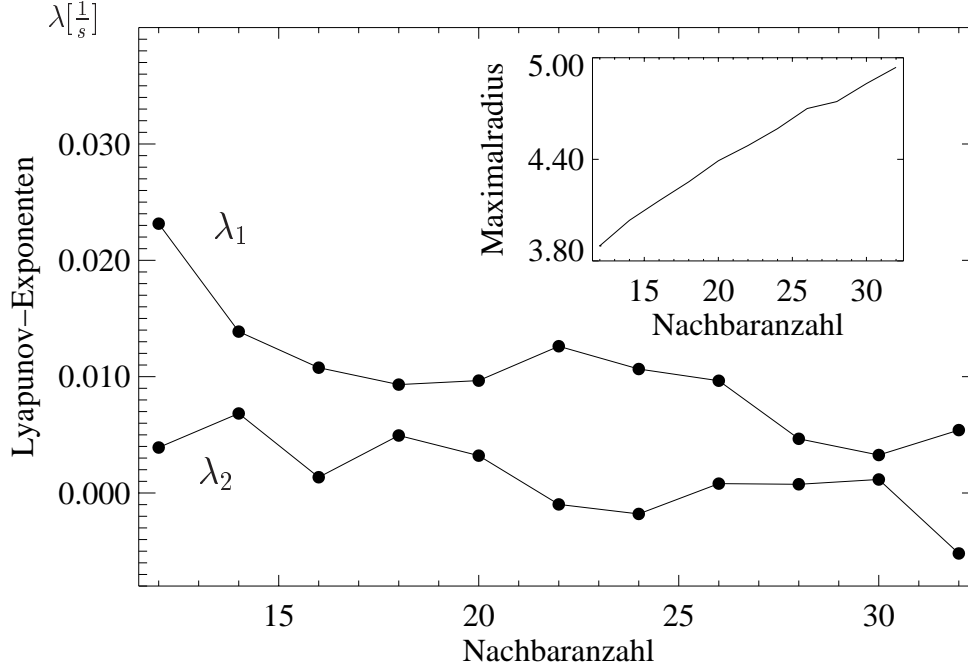


Abbildung 19: Experimenteller BSN-Zustand, der auch Abbildung 18 zugrunde liegt. Dargestellt sind die beiden größten Lyapunov-Exponenten für verschiedene Nachbaranzahlen $N_{Nachbar}$. Die Berechnungen werden für $d_{Global}=15$ und den Einstellungen aus Abbildung 18 durchgeführt. Innen: Mittlerer Maximalradius innerhalb dessen die vorgegebene Anzahl von Nachbarn gefunden wird. Der Kurvenverlauf erlaubt keine direkten Abschätzungen von λ_1 und λ_2 .

Abbildung 20 zeigt das Verhalten der drei größten Lyapunov-Exponenten, die sich aus einer chaotischen BSN-Zeitreihe mit wachsender lokaler Dimension ergeben. Für $d_{Lokal} > 6$ treten vermehrt Fehler bei der Nachbarsuche auf, so daß die Abschätzung der Lyapunov-Exponenten in diesem Bereich nur eine begrenzte Gültigkeit besitzt.

In Abbildung 21 sind Abschätzungen der drei größten Lyapunov-Exponenten eines weiteren chaotischen BSN-Zustandes mit wachsender globaler Dimension aufgetragen. Wie auch in Abbildung 18 erkennen wir hier eine Konvergenz der Lyapunov-Exponenten mit der globalen Dimension. Die Frage bezüglich der Zuverlässigkeit der Abschätzung im Hinblick auf die Anzahl der positiven Lyapunov-Exponenten werden wir in Kapitel 5.1 diskutieren.

Im nächsten Abschnitt wollen wir nun die Ergebnisse zu lokalisierten Lyapunov-Exponenten aus BSN-Zeitreihen vorstellen.

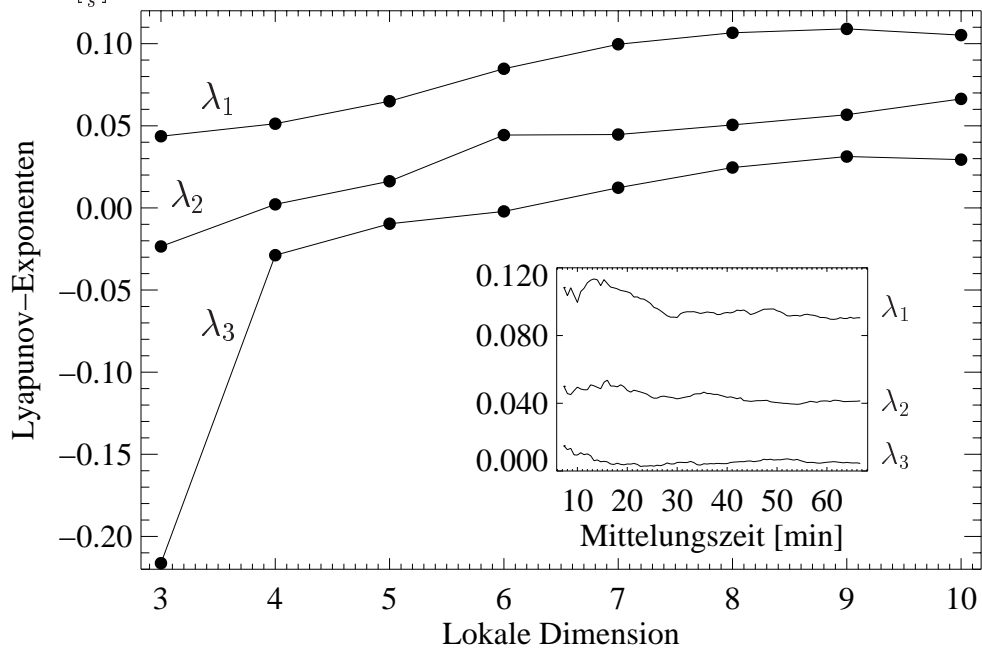


Abbildung 20: Experimenteller chaotischer BSN-Zustand mit $f_H = 3$ und $D_2 \approx 4.9$. Aufgetragen sind die drei größten Lyapunov-Exponenten mit wachsender lokaler Dimension. Verwendet werden die Einstellungen: $d_{Global}=12$, $T_E=0.4s$, $L_{Taylor}=1$, $t_{Mittelung}=2000s$, $\tau=0.4s$, $d_{eof}=72$ und $N_{Nachbar} = 2 \cdot d_{Lokal}$. Der Berechnung liegen 60000 Datenpunkte zugrunde. Innen: Bestimmung der drei größten Lyapunov-Exponenten für $N_{Nachbar} = 12$.

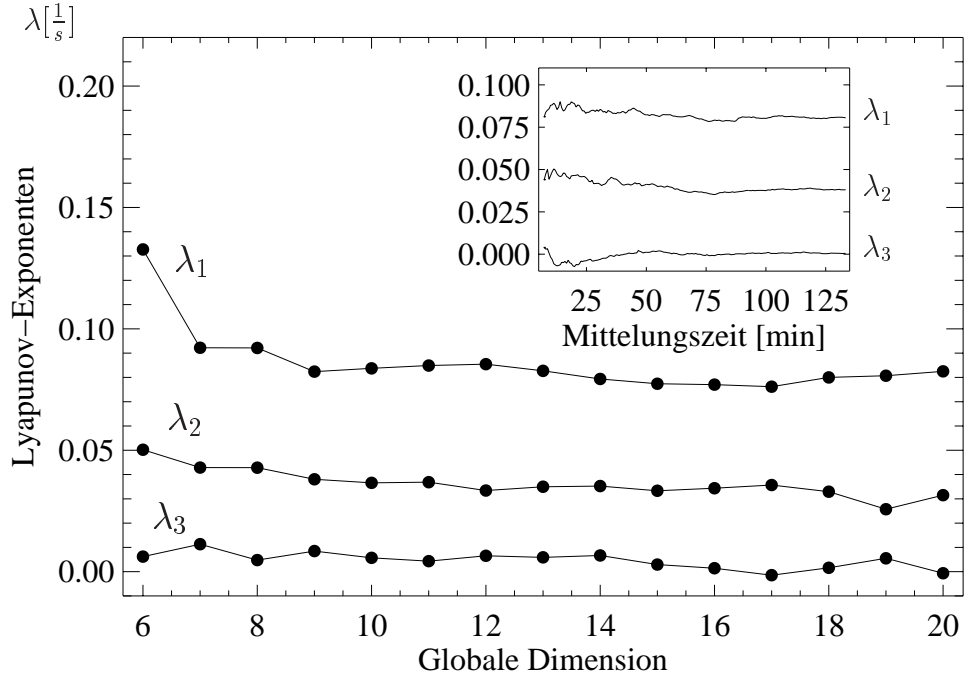


Abbildung 21: Experimenteller chaotischer BSN-Zustand mit $f_H = 3$ und $D_2 \approx 4.3$. Dargestellt sind die drei größten Lyapunov-Exponenten mit wachsender globaler Dimension für die Einstellungen: $d_{Lokal}=6$, $T_E=0.4s$, $L_{Taylor}=1$, $t_{Mittelung}=4000s$, $\tau=0.8s$, $d_{eof}=32$ und $N_{Nachbar}=12$. Der Berechnung liegen 90000 Datenpunkte zugrunde. Innen: Bestimmung der drei größten Lyapunov-Exponenten für $N_{Nachbar} = 12$ und $d_{Global} = 16$.

4.2 Lokalisierte Lyapunov-Exponenten aus BSN-Zeitreihen

Mit Hilfe von lokalisierten Lyapunov-Exponenten können wir die Attraktoren, welche die BSN-Dynamik im rekonstruierten Phasenraum repräsentieren, detaillierter beschreiben. Um die lokalisierten Lyapunov-Exponenten sinnvoll interpretieren zu können, verwenden wir verschiedene Darstellungsmethoden.

Abbildung 22 zeigt die in Kapitel 3.2.3 vorgestellte Größe $\tilde{\lambda}_{t_0}^{(j)}(t, s_{max})$ für den periodischen Zustand aus Abbildung 17. Die Größe $\tilde{\lambda}_{t_0}^{(j)}(t, s_{max})$ ist dabei ein Maß für die lokalen Streckungseigenschaften der Dynamik entlang des periodischen Orbits. Sie besitzt nicht exakt die gleichen Eigenschaften wie der lokalisierte Lyapunov-Exponent $\lambda_{lok,j}$. Für periodische Zustände lassen sich jedoch aus beiden Größen vergleichbare Aussagen gewinnen.

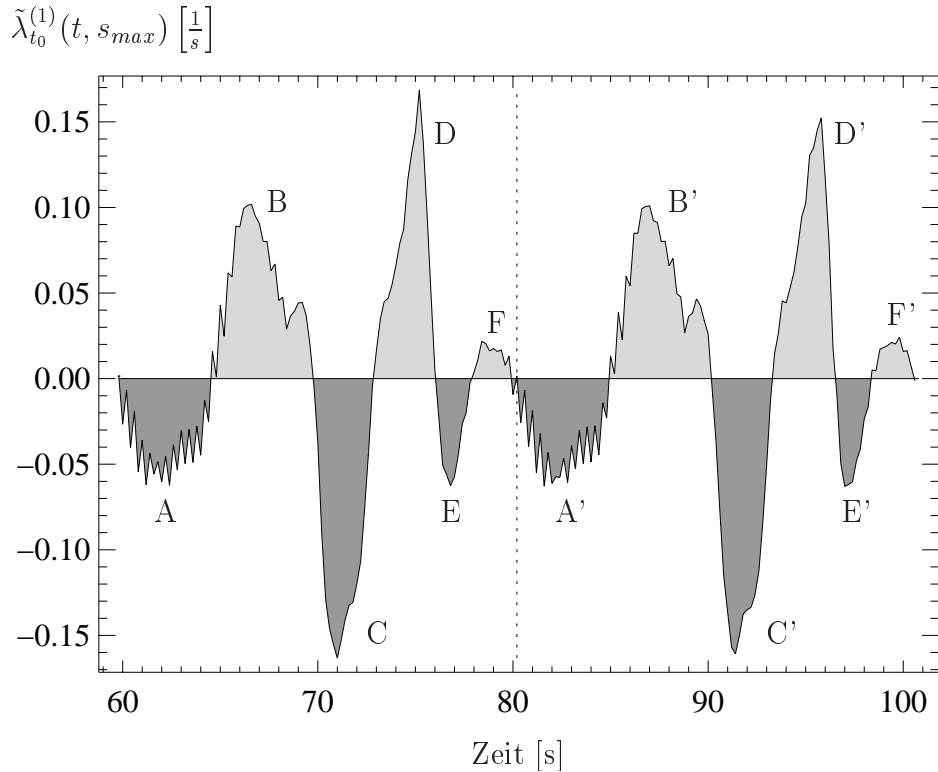


Abbildung 22: Experimenteller periodischer BSN-Zustand, der auch Abbildung 17 zugrunde liegt. Wir erkennen jeweils drei Bereiche mit positiven (B,D,F) und negativen (A,C,E) Werten der Größe $\tilde{\lambda}_{t_0}^{(1)}(t, s_{max})$, welche die lokalen Streckungseigenschaften der Dynamik beschreibt. Wir verwenden $s_{max}=4$ Skalenteile. Der Attraktordurchmesser beträgt ca. 90 Skalenteile.

Die Trajektorie wird in diesem Beispiel über 2 Attraktorumläufe verfolgt, um zu zeigen, daß die beobachteten Minima und Maxima von $\tilde{\lambda}_{t_0}^{(1)}(t, s_{max})$ nahezu unabhängig vom Startzeitpunkt t_0 sind.

Für die Beschreibung komplexerer Zustände bedienen wir uns der Projektion auf die ersten zwei- oder drei EOF-Koordinaten und einer zusätzlichen Farbkodierung, welche den lokalisierten Lyapunov-Exponenten $\lambda_{lok,j}$ an der betreffenden Stelle beschreibt.

Da sich die lokalisierten Lyapunov-Exponenten direkt aus Gleichung (13) ergeben, lassen sie sich für alle Zeitreihen bestimmen, für welche die Kriterien einer sinnvollen Abschätzung der globalen Lyapunov-Exponenten erfüllt sind.

Für diese Darstellung benutzen wir zur Phasenraum-Einteilung die Methode der Vektorquantisierung aus Kapitel 3.2. Die Anzahl der Zellen, mit denen wir den Ersatz-Phasenraum einteilen wählen wir, abhängig von der Datenanzahl und der Art der Dynamik, im Bereich von 100 bis 1000 Zellen. Für quasiperiodische und chaotische Zustände verwenden wir im allgemeinen eine größere Anzahl von Zellen, als für periodische Zustände.

Abbildung 23 zeigt einen rekonstruierten 2-Frequenz-Torus, den wir aus 15000 Datenpunkten einer quasiperiodischen BSN-Zeitreihe berechnen. Die Einbettung wird mit $\tau = 0.8s$ und $d_{eof} = 40$ durchgeführt. Dargestellt ist eine Projektion auf die ersten drei EOF-Koordinaten. Um zu zeigen, daß es sich tatsächlich um einen Torus handelt, der im Inneren hohl ist, haben wir ihn für die Darstellung in der Mitte durchgeschnitten und aufgeklappt.

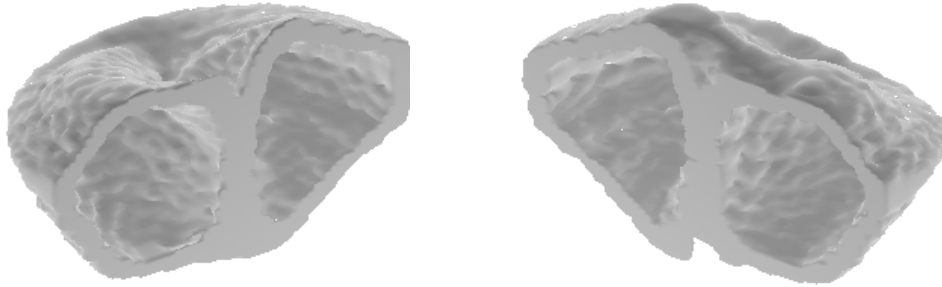


Abbildung 23: Experimenteller quasiperiodischer BSN-Zustand. Dreidimensionale Darstellung durch Projektion auf die ersten drei EOF-Koordinaten.

Abbildung 24 zeigt die beiden größten lokalisierten Lyapunov-Exponenten in der Schnittebene. Zur Bestimmung der lokalisierten Lyapunov-Exponenten werden 90000 Datenpunkte und die Einstellungen $d_{Lokal}=5$, $d_{Global}=12$, $N_{Nachbar}=15$, $L_{Taylor}=1$, $t_{Mittelung}=6000s$ und $T_E=0.4s$ verwendet. Der Attraktor wird für die Berechnung mit 500 Zellen überdeckt.

Zum Vergleich ist in Abbildung 25 der größte lokalisierte Lyapunov-Exponent eines chaotischen BSN-Zustandes dargestellt. Der Schnitt, der in der rechten Hälfte zu sehen ist, liegt in der Ebene, die in der Projektion auf der linken Seite durch eine gestrichelte Linie gekennzeichnet ist.

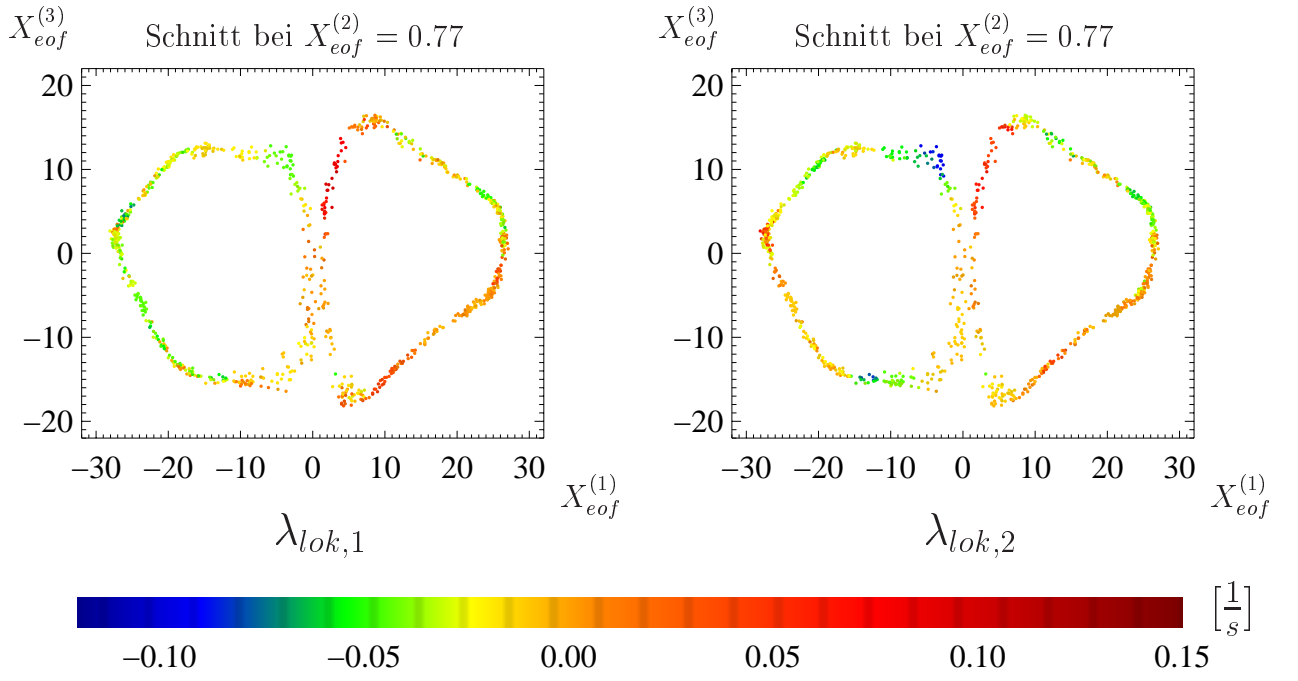


Abbildung 24: Farbkodierte Darstellung der beiden größten lokalisierten Lyapunov-Exponenten $\lambda_{lok,1}$ und $\lambda_{lok,2}$ in der Schnittebene aus Abbildung 23.

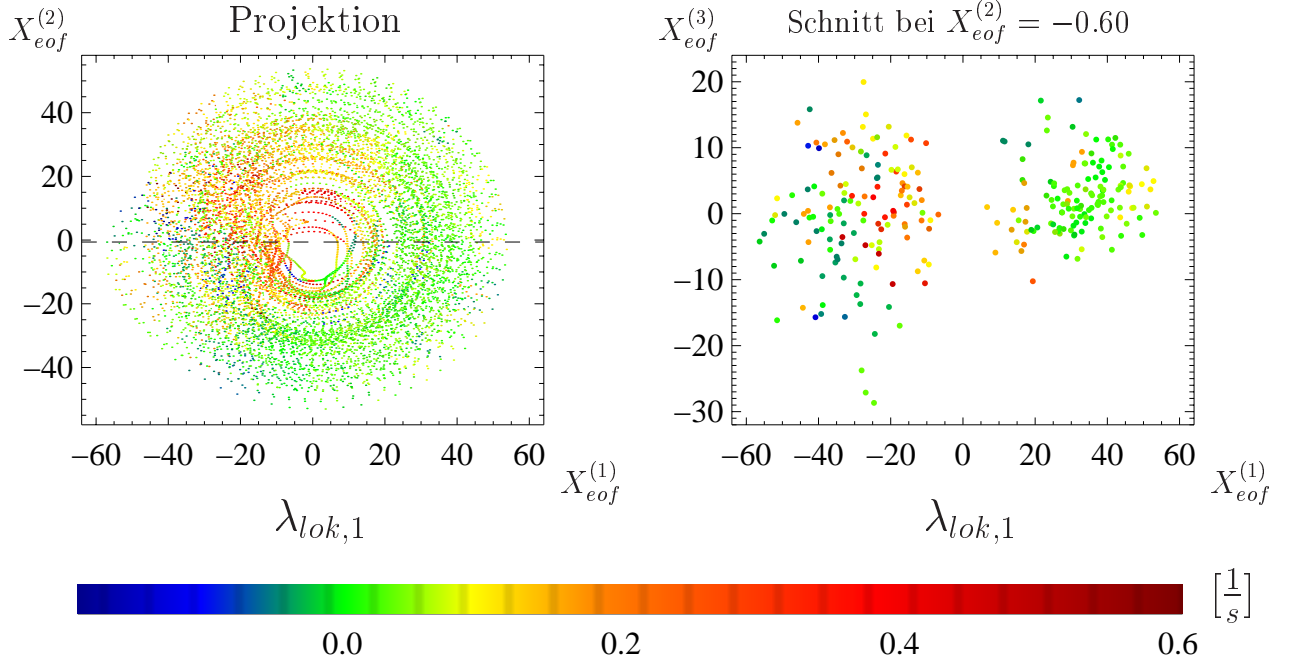


Abbildung 25: Experimenteller chaotischer BSN-Zustand, der auch in Abbildung 20 betrachtet wird. Die Farbe kodiert den größten lokalisierten Lyapunov-Exponenten $\lambda_{lok,1}$.

4.3 Lyapunov-Exponenten entlang einer RTN-Route ins Chaos

Die folgenden Betrachtungen dienen der Beschreibung von BSN-Zuständen entlang einer RTN-Route ins Chaos. Als Kontrollparameter verwenden wir dabei den Strom durch den BSN-Kristall. Die Route besteht insgesamt aus 22 Zeitreihen, die übersichtlich in Tabelle 3 dargestellt sind. Unter der Überschrift 'Vorkenntnisse' vermerken wir eventuell vorhandene Ergebnisse aus vorangegangenen Arbeiten [17,19]. Die für unsere Untersuchungen wichtigste Information ist durch die Anzahl der Hauptfrequenzen f_H und die Korrelationsdimension D_2 gegeben.

Name	Strom [mA]	Samplezeit [s]	Datenpunkte	Vorkenntnisse
r1a	0.10	0.4	650	$f_H = 1, D_2 \approx 1$
r1b*	0.20	0.2	80000	$f_H = 1, D_2 \approx 1.03$
r1c	0.25	0.4	1224	$f_H = 2$
r1d	0.30	0.2	10000	$f_H = 2, D_2 \approx 2.6$
r1e	0.40	0.2	12000	$f_H = 2, D_2 \approx 2.4$
r1f*	0.50	0.2	30000	$f_H = 2$
(r1g)	0.60	0.4	700	$f_H = 2$
(r1h)	0.60	0.4	2186	$f_H = 2$
r1i*	0.70	0.4	90000	$f_H = 2, D_2 \approx 2.4$
(r1j)	0.76	0.4	24278	$f_H = 2$
r1k*	0.78	0.4	19685	$f_H = 3$
r1l	0.80	0.4	90000	$f_H = 3, D_2 \approx 1.01$
(r1m)	0.80	0.4	2520	$f_H = 3$
r1n*	0.82	0.4	14166	$f_H = 3, D_2 \approx 1.35$
r1o*	0.84	0.4	11336	$f_H = 3, D_2 \approx 2.3$
r1p	0.86	0.4	6587	$f_H = 3$
r1q*	0.88	0.4	10994	$f_H = 3, D_2 \approx 3.8$
(r1r)	0.90	0.4	2470	$f_H = 3$
r1s	0.94	0.4	2220	$f_H = 3$
r1t	0.96	0.4	2425	$f_H = 3$
r1u	0.98	0.4	2615	$f_H = 3$
r1v*	1.00	0.4	60000	$f_H = 3, D_2 \approx 4.9$

Tabelle 3: Übersicht der BSN-Zeitreihen, die eine RTN-Route ins Chaos beschreiben.

Wir sehen, daß einige der Zeitreihen zum Teil nur eine Länge von weniger als 2500 Datenpunkten besitzen. Für quasiperiodische und chaotische Zustände lassen sich aus solch kurzen Zeitreihen im allgemeinen keine zuverlässigen Abschätzungen der Lyapunov-Exponenten erhalten. Untersuchungen zu globalen Lyapunov-Exponenten führen wir deshalb nur an 17, ausreichend langen Zeitreihen durch. Von diesen wählen wir 8 Zeitreihen aus, die sich für eine detailliertere Untersuchung von lokalisierten Lyapunov-Exponenten besonders eignen. Diese sind in der Tabelle mit einem Stern (*) gekennzeichnet. Die Kriterien für die Wahl sind in erster Linie die

Datensatzlänge und die Position innerhalb der RTN-Route, um möglichst alle charakteristischen Abschnitte der Route zu erfassen. Die 5 Zeitreihen, die nicht für die Untersuchungen zu globalen Lyapunov-Exponenten verwendet werden, sind in der Tabelle in Klammern gesetzt.

Abbildung 26 links zeigt die normierte Häufigkeitsverteilung n_{λ_1} der Beiträge R_1 zum größten globalen Lyapunov-Exponenten für den quasiperiodischen Zustand r1i und den chaotischen Zustand r1v. Die Auftragung im rechten Bild zeigt die beiden größten globalen Lyapunov-Exponenten entlang der RTN-Route. Die Häufigkeitsverteilung n_{λ_1} ist dabei zusätzlich in eine Grauverteilung umgerechnet.

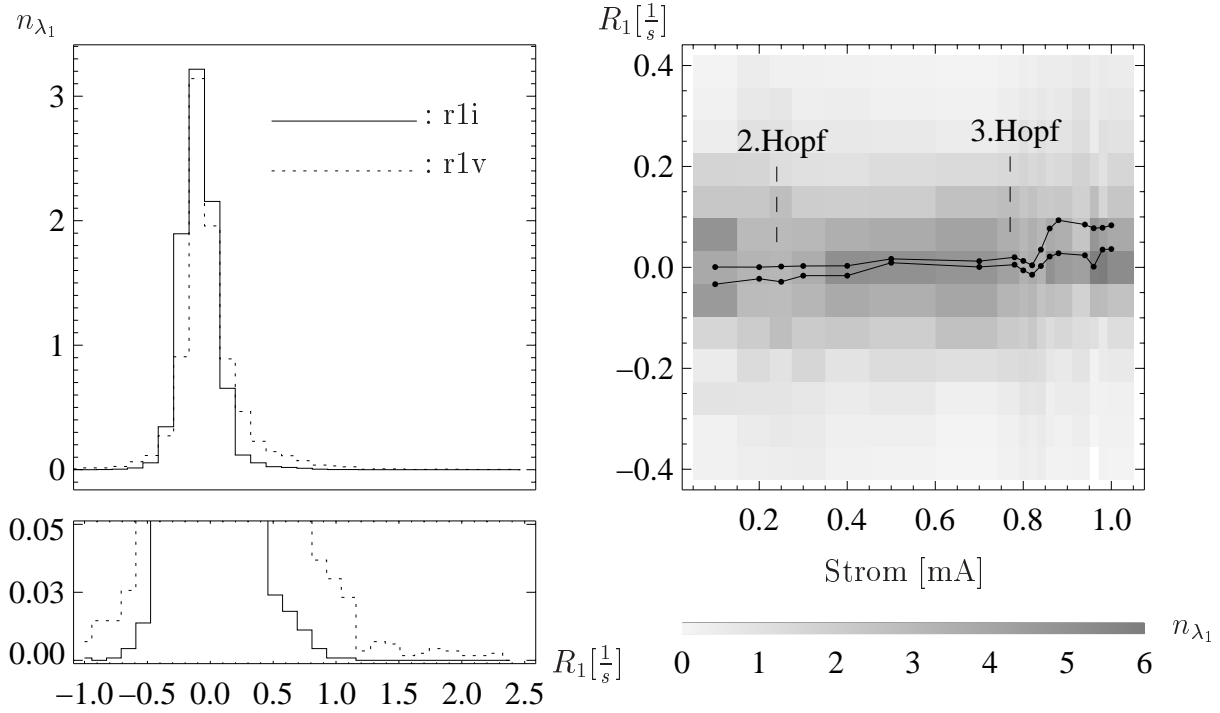


Abbildung 26: Links oben: Normierte Häufigkeitsverteilung n_{λ_1} für die BSN-Zeitreihen r1i und r1v aus Tabelle 3. Links unten: Ausschnittsvergrößerung, um den höheren Anteil positiver Beiträge für den chaotischen Zustand r1v darzustellen. Zur Darstellung der Verteilung werden 30 Klassen verwendet. Rechts: Größter und zweitgrößter globaler Lyapunov-Exponent von 17 BSN-Zeitreihen entlang der RTN-Route. Die Verteilungen der lokalen Beiträge R_1 sind in eine Grauverteilung umgerechnet. Dargestellt ist der Bereich von $-0.42 \leq R_1 \leq +0.42$. Wir verwenden 13 Histogrammklassen.

In Abbildung 27 stellen wir nur Beiträge R_1 dar, die eine geringere normierte Häufigkeit n_{λ_1} als 0.25 aufweisen, so daß wir dadurch die Maxima der Verteilung ausblenden und uns stattdessen die Flanken genauer anschauen können. Gleichzeitig überdecken wir einen größeren Bereich von R_1 . Wir beobachten, daß die Verteilungen von R_1 für verschiedene BSN-Zustände entlang der RTN-Route ein Maximum in der Nähe des Nullpunktes besitzen und für chaotische Zustände einen erhöhten Anteil von positiven Beiträgen aufweisen.

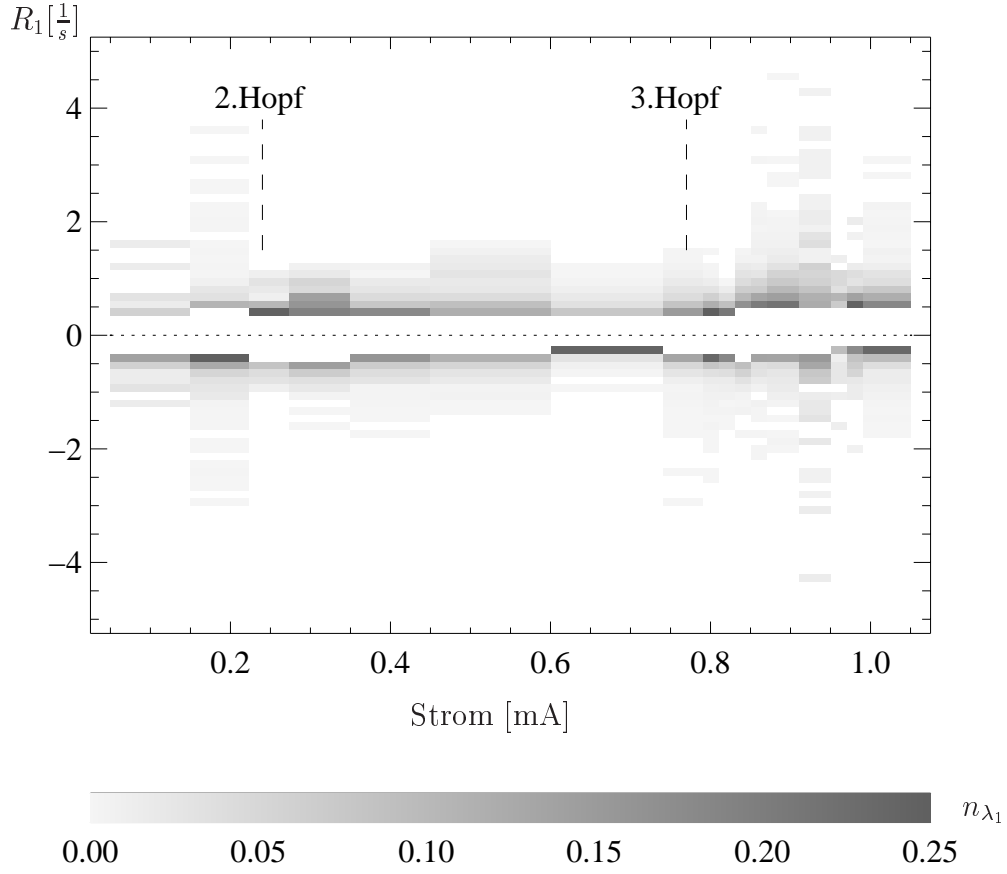


Abbildung 27: Zu sehen ist die selbe Darstellung wie in Abbildung 26 (rechts), jedoch im Bereich von $-5.0 \leq R_1 \leq +5.0$ und einer oberen Grenze von 0.25 für die normierte Anzahl n_{λ_1} . Wir verwenden 75 Histogrammklassen.

In den beiden Farbgraphiken 28 und 29 betrachten wir den größten lokalisierten Lyapunov-Exponenten $\lambda_{lok,1}$ für 8 ausgewählte BSN-Zeitreihen entlang der RTN-Route ins Chaos. Der jeweilige Attraktor ist im $X_{eof}^{(1)}/X_{eof}^{(2)}/X_{eof}^{(3)}$ -Koordinatensystem dargestellt. Zur besseren Übersicht sind die Attraktoren zusätzlich auf die achsenparallelen Ebenen projiziert.

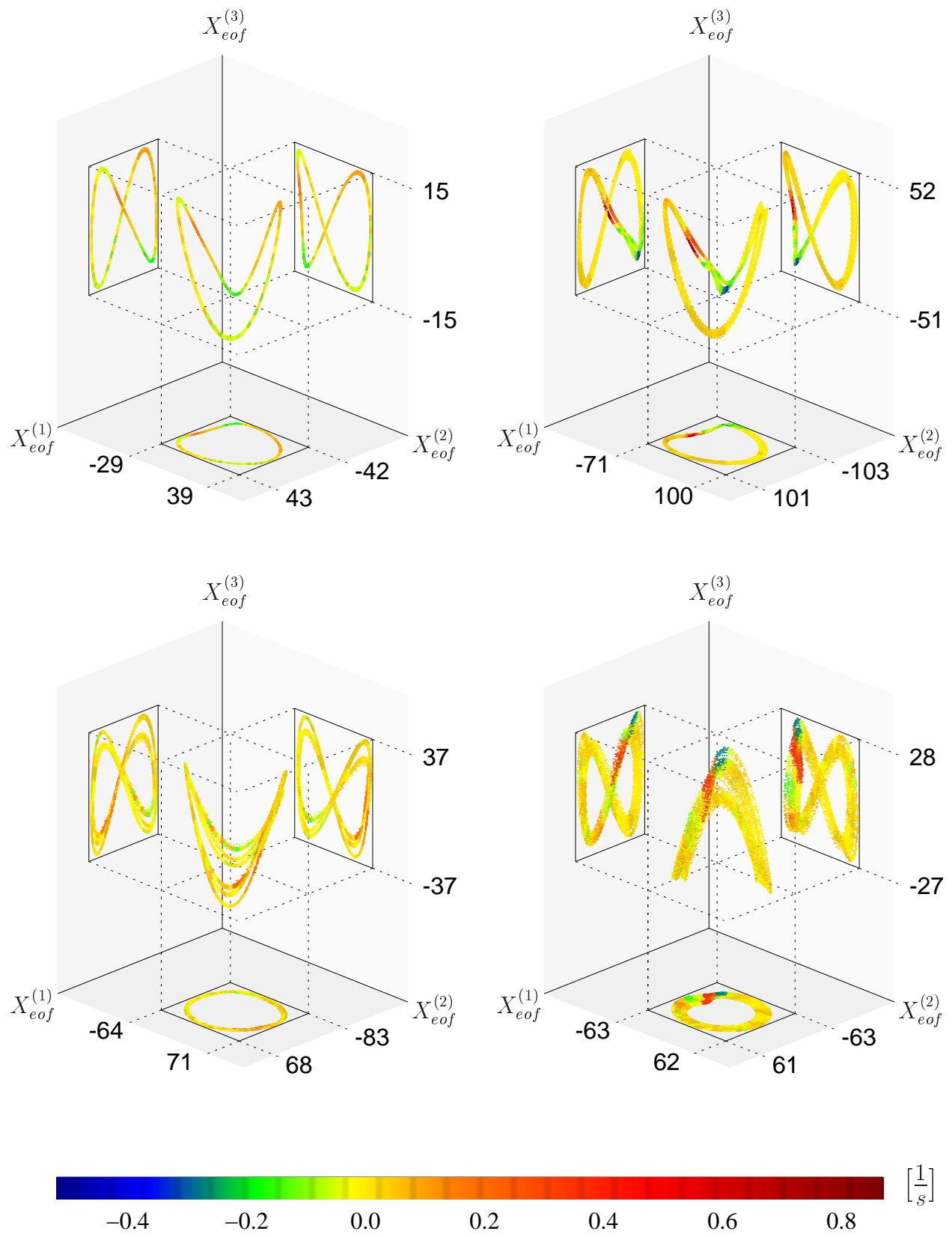


Abbildung 28: Dargestellt ist der größte lokalisierte Lyapunov-Exponent $\lambda_{lok,1}$ entlang einer RTN-Route. Von links nach rechts und von oben nach unten: BSN-Zeitreihen r1b,r1f,r1i und r1k aus Tabelle 3.

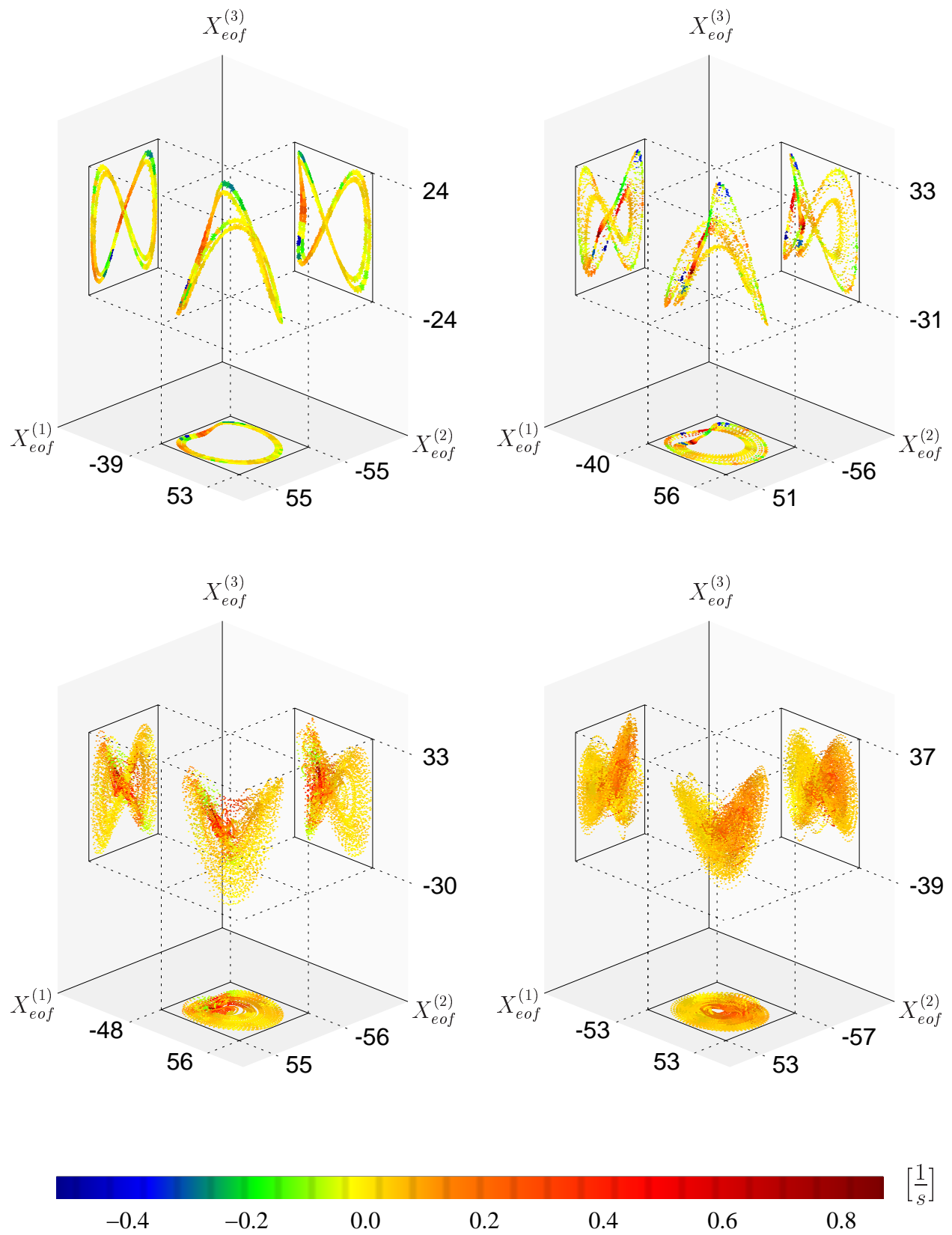


Abbildung 29: Aufgetragen ist der größte lokalisierte Lyapunov-Exponent $\lambda_{lok,1}$ entlang einer RTN-Route. Von links nach rechts und von oben nach unten: BSN-Zeitreihen r1n,r1o,r1q und r1v aus Tabelle 3.

4.4 Lyapunov-Exponenten aus der BSN-Modellgleichung

Die BSN-Modellgleichung (6) erlaubt es, experimentelle periodische Zustände sehr genau zu beschreiben, indem der Parametervektor \vec{k} an die experimentellen Daten angepaßt wird [23]. Die folgende Tabelle zeigt einen typischen Parametersatz, den wir im folgenden etwas genauer betrachten wollen.

Parameter	k_1	k_2	k_3	k_4	k_5	k_6	k_7	k_8
Wert	0.648	-69.00	0.000122	7.94	0.0117	19.15	-61.70	68.00

Tabelle 4: Beispiel für einen Parametersatz der BSN-Modellgleichung zur Modellierung eines experimentell beobachteten periodischen BSN-Zustandes.

Eine interessante Beobachtung ist, daß die Terme $f_t = e^{k_3 \cdot U_p(t)}$ und $f_\tau = e^{k_5 \cdot U_p(t-k_6)}$ auf der rechten Seite von Gleichung (6), für die gewählten Parameter k_3 und k_5 aus obiger Tabelle und Werte für U_p von ca. 50 V, einen näherungsweise linearen Zusammenhang darstellen. Dies ist aus Abbildung 30 ersichtlich.

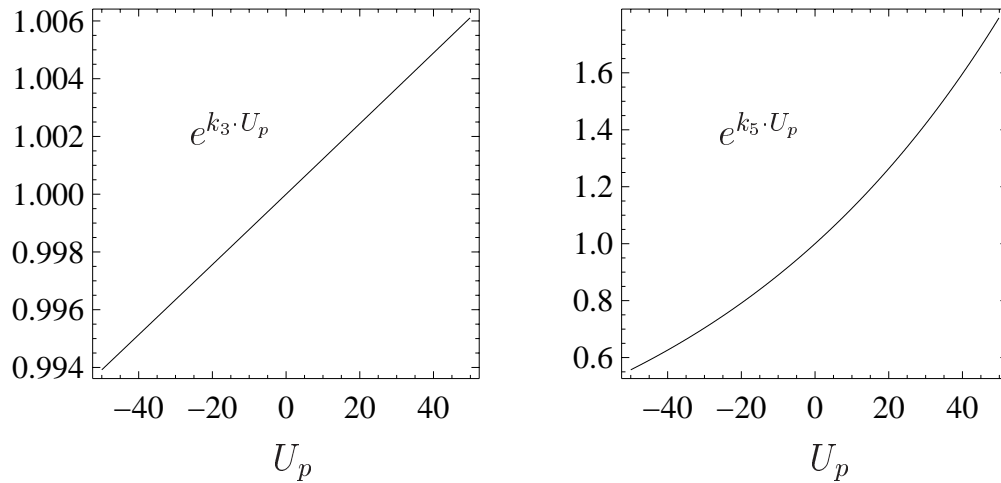


Abbildung 30: Darstellung der Terme $f_t = e^{k_3 \cdot U_p(t)}$ und $f_\tau = e^{k_5 \cdot U_p(t-k_6)}$ aus der BSN-Modellgleichung (6) für einen typischen Parametervektor, wie er aus experimentellen Daten bestimmt wird. Wir erkennen einen näherungsweise linearen Zusammenhang für beide Terme.

Wir beobachten, daß die Modellgleichung bei Variationen der meisten Komponenten von \vec{k} eine Polarisationsspannung U_p beschreibt, die streng monoton gegen $-\infty$ strebt. Die Komponente k_6 , welche der Delayzeit τ entspricht, läßt eine geringe Variation zu, innerhalb derer sich die Amplitude und die Periode von U_p verändert, wobei die periodische Bewegung, als charakteristische Dynamik erhalten bleibt, wie in Abbildung 34 (links) zu sehen ist.

Wie wollen nun das Verhalten der BSN-Modellgleichung bei Variation der Delayzeit

τ untersuchen und bestimmen die globalen Lyapunov-Exponenten für den Parametersatz aus Tabelle 4. Zuvor prüfen wir jedoch die in Kapitel 3.3 beschriebenen Algorithmen zur Berechnung von Lyapunov-Exponenten aus Delayssystemen, an der Mackey-Glass-Delaygleichung (21) bei Verwendung der Parameter $a=0.2$, $b=0.1$, $c=10$ und $\tau=24$. Wir initialisieren das Testsystem mit einem konstanten Startwert von $x(t)=0.16$ für $t \in [t_0 - \tau, t_0]$.

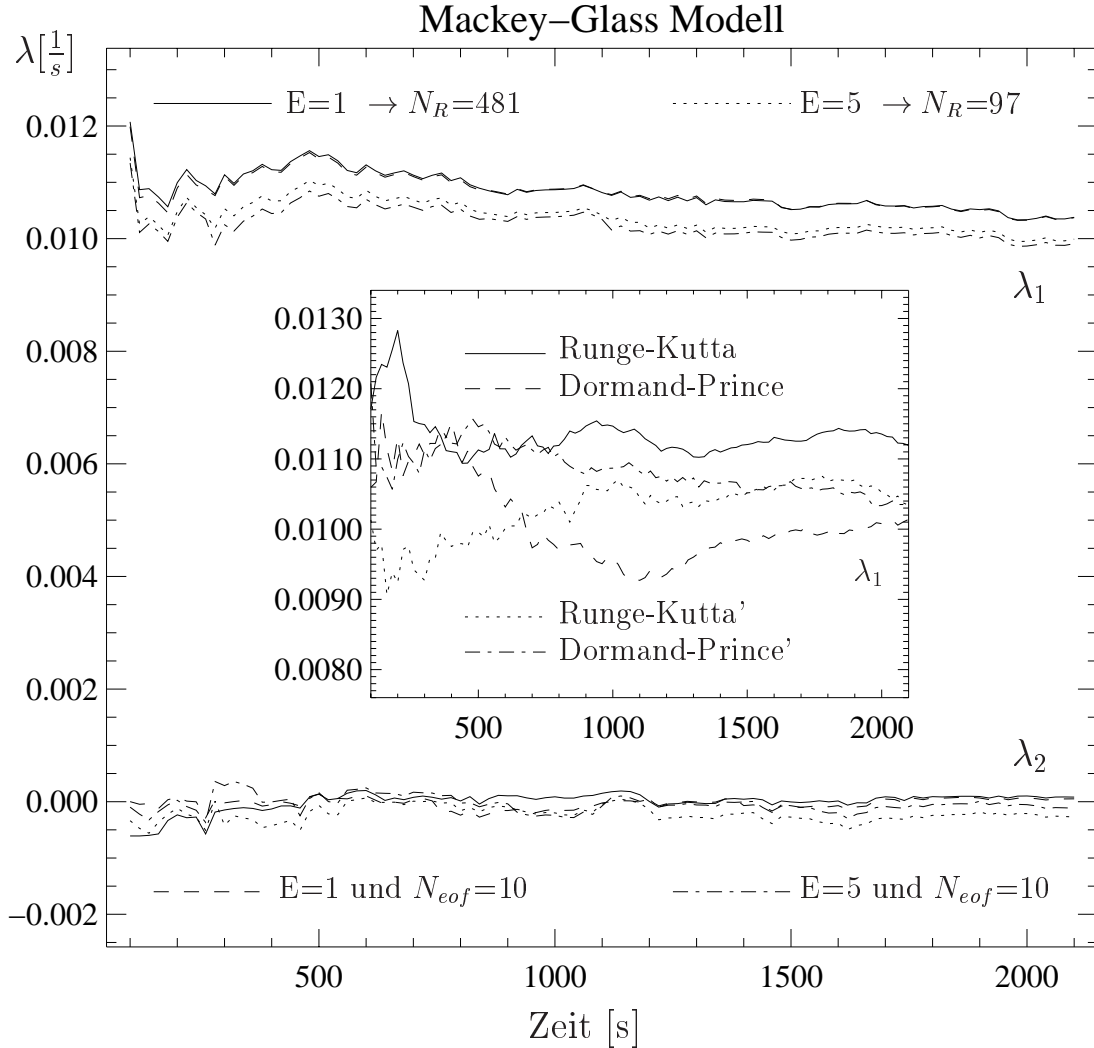


Abbildung 31: Großes Bild: Berechnung der beiden größten Lyapunov-Exponenten des Mackey-Glass-Delaysystems bei verschiedenen Dimensionen N_R und N_{eof} . Verwendet wird das Dormand-Prince'-Integrationsverfahren und $N=481$. Kleines Bild: Einfluß der Wahl des Integrationsverfahrens auf die Berechnung. Es gilt $N=N_R=481$. Die Berechnung wird ohne EOF-Zerlegung durchgeführt.

In den Abbildungen 31 und 32 stellen wir die Resultate dieser Testuntersuchungen vor. Wir erkennen in Abbildung 31, daß sich die genaueren Berechnungen mit $E=1$ ($N_R = N$) etwas von den Berechnungen mit $E=5$ ($N_R < N$) unterscheiden, während

die Frage, ob wir die EOF-Methode verwenden in diesem Fall keine große Rolle spielt. Im kleinen Bild ist ersichtlich, daß das Runge-Kutta-Verfahren 4.Ordnung, welches die alten Zwischenwerte bei der Integration verwendet, sichtbar von den verbesserten Integrationsverfahren Runge-Kutta', Dormand-Prince und Dormand-Prince' abweicht.

Die Untersuchungen in Abbildung 32 zeigen, daß die Wahl einer zu geringen Dimension N_{eof} zu Fehlern führen kann, die besonders bei geringer Lyapunov-Exponenten auftreten. Wir beobachten jedoch auch für die periodischen Zustände für $\tau < 16.5$ Abweichungen von $\lambda_1 = 0$, selbst wenn wir $E=1$ verwenden und auf die EOF-Zerlegung verzichten.

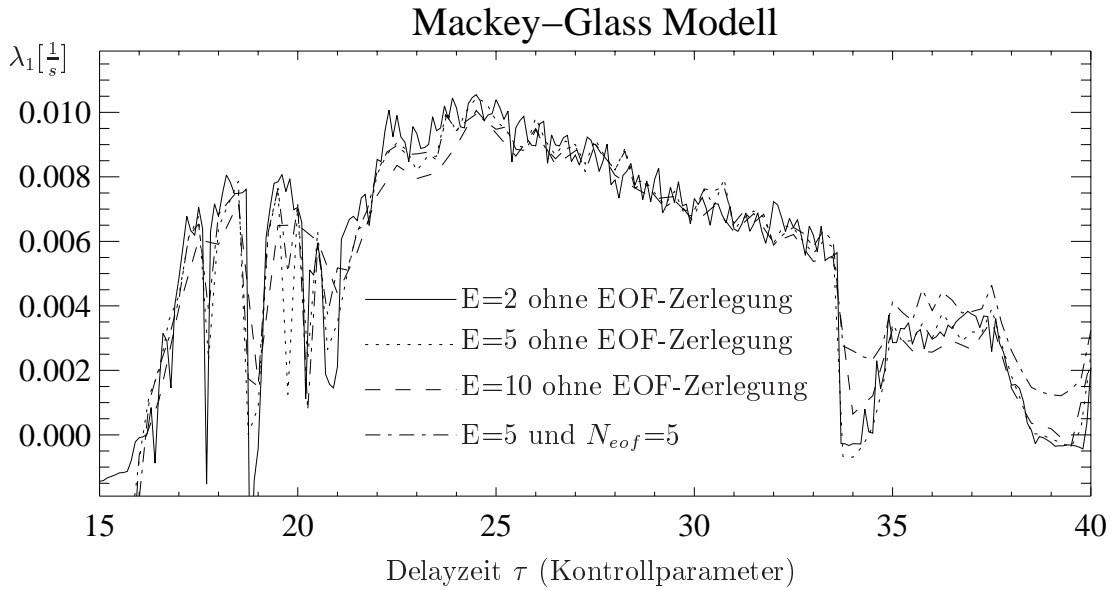


Abbildung 32: Berechnung des größten Lyapunov-Exponenten des Mackey-Glass-Delaysystems in Abhängigkeit von der Delayzeit τ . Wir verwenden $N=481$ und das Dormand-Prince'-Integrationsverfahren. Für die chaotischen Zustände mit $\lambda_1 > 0$ ergeben sich für die verschiedenen Verfahren näherungsweise die gleichen Werte, während wir bei den Zuständen mit geringen Lyapunov-Exponenten zum Teil starke Abweichungen erkennen.

Aufgrund der Ergebnisse aus Abbildung 31 verwenden wir das Dormand-Prince'-Integrationsverfahren zur Integration der BSN-Delay-Differentialgleichung. Wir entscheiden uns für das in Kapitel 3.3.1 beschriebene Verfahren der direkten Methode, welches zwar eine erhöhte Rechenzeit beansprucht, von dem wir uns aber die exaktesten Ergebnisse bei der Berechnung von Lyapunov-Exponenten aus der BSN-Modellgleichung erwarten.

Abbildung 33 zeigt den größten Lyapunov-Exponenten bei Verwendung des Parametervektors \vec{k} aus Tabelle 4 in Abhängigkeit von der Delayzeit $\tau = k_6$. Wir wählen eine Zeitschrittweite von $\Delta t=0.05$.

Für den Parametersatz aus Tabelle 4 betrachten wir auch die Beiträge R_1 zum größten globalen Lyapunov-Exponenten entlang des periodischen Orbits. Für die Darstellung verwenden wir die bereits in Abbildung 22 verwendete Größe $\tilde{\lambda}_{t_0}^{(j)}(t, s_{max})$. Das Ergebnis dieser Untersuchung ist in Abbildung 35 zu sehen. Die R_1 liegen im Bereich von -6.3 bis 3.4 s^{-1} . Wir beobachten entlang eines Attraktorkumlaufs nur jeweils eine Region mit positiven bzw. negativen Werten von $\tilde{\lambda}_{t_0}^{(j)}(t, s_{max})$.

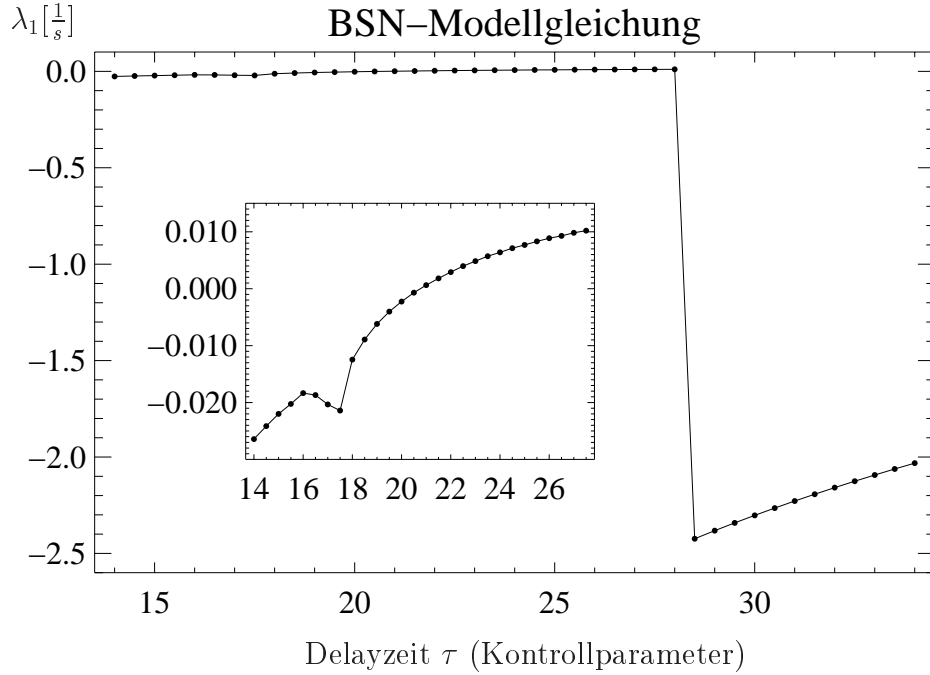


Abbildung 33: Bestimmung des größten globalen Lyapunov-Exponenten aus der BSN-Modellgleichung für die Parametereinstellungen aus Tabelle 4 und Variation der Delayzeit $\tau = k_6$ im Bereich von 14 bis 32 bei einer Schrittweite von 0.5. Wir stellen jeweils den größten Lyapunov-Exponenten nach $200 \cdot \tau$ Zeiteinheiten dar. Wir erkennen eine abrupte Änderung der Dynamik zwischen $\tau=28$ und 28.5 . Innen: Vergrößerter Bereich von $\tau=14$ bis 28.

Wir haben uns in diesem Kapitel mit den Ergebnissen beschäftigt, die wir aus unseren Untersuchungen zum Themenkreis Lyapunov-Exponenten beim BSN-System erhalten haben. Im anschließenden Kapitel wollen wir uns nun ausführlich mit der Interpretation dieser Resultat auseinandersetzen.

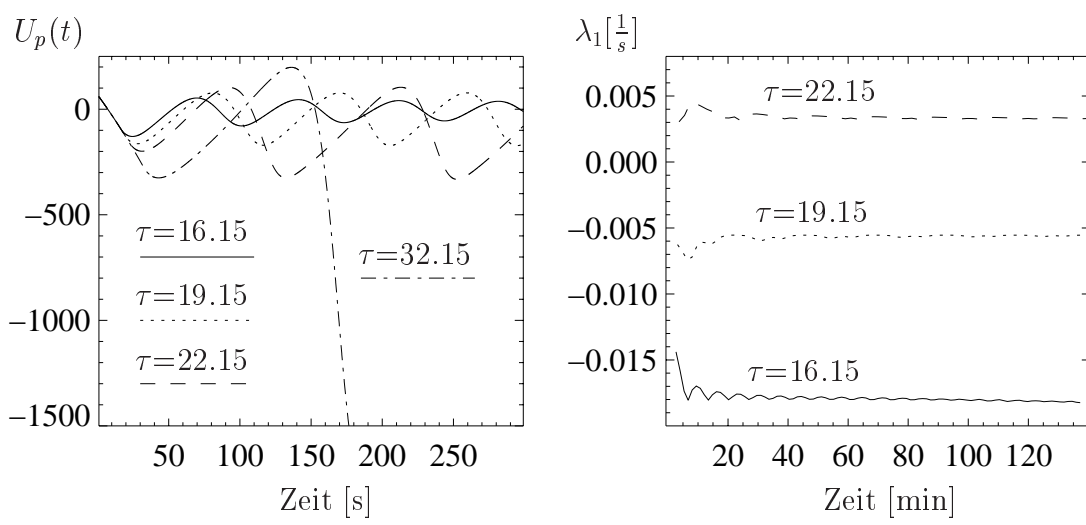


Abbildung 34: Links: Darstellung des Polarisationsspannung $U_p(t)$, die für verschiedene Parameter $\tau = k_6$ aus der Modellgleichung berechnet ist. Wir erkennen das $U_p(t)$ für $\tau=32.15$ steil abfällt. Genauere Untersuchungen zeigen, daß U_p streng monoton gegen $-\infty$ strebt. Rechts: Wir sehen die Entwicklung des größten Lyapunov-Exponenten für die drei verschiedenen τ -Einstellungen aus dem linken Bild.

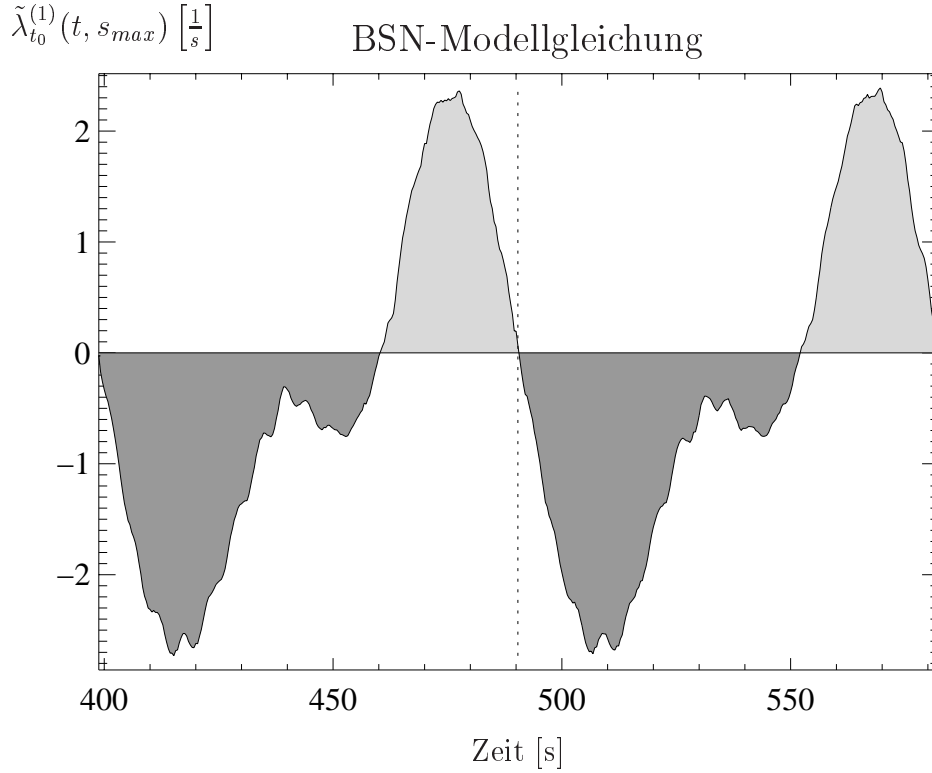


Abbildung 35: Darstellung der stabilisierenden und destabilisierenden Bereiche entlang eines periodischen Orbits, der aus der BSN-Modellgleichung berechnet wird. Für die Bestimmung der Größe $\tilde{\lambda}_{t_0}^{(j)}(t, s_{max})$ verwenden wir $s_{max}=4$ Skalenteile. Dargestellt sind zwei Attraktorumläufe.

5 Diskussion

Bevor wir mit der Interpretation unserer Ergebnisse zur Abschätzung von Lyapunov-Exponenten aus experimentellen Zeitreihen beginnen, wollen wir eine wichtige Frage klären, die uns schon in Kapitel 3 beschäftigt hat. Sie betrifft die Genauigkeit, mit der sich Lyapunov-Exponenten aus experimentellen Zeitreihen mit unserem Verfahren bestimmen lassen.

Von den Faktoren, welche die Abschätzung beeinflussen können, spielen die Datensatzlänge und der Rauschpegel der Zeitreihe die wichtigste Rolle. Bei zu wenigen Daten muß der Radius, innerhalb dessen die geforderte Anzahl von Nachbarn gefunden wird, oftmals relativ groß eingestellt werden. Wie wir in Kapitel 3.4.3 gesehen haben, wirkt sich dies im allgemeinen negativ auf eine korrekte Abschätzung der Lyapunov-Exponenten aus. Eine quantitative Fehlerangabe hierzu ist jedoch schlecht möglich, denn der Fehler hängt immer von der speziellen Dynamik des untersuchten Systems und der Genauigkeit der jeweiligen Messung ab.

Die Ergebnisse, die wir in Kapitel 4 vorgestellt haben, müssen deshalb als Abschätzung mit von Fall zu Fall unterschiedlichem Fehler angesehen werden. Wie jedoch an den Testuntersuchungen in Abbildung 14 und 15 zu erkennen ist, erhalten wir zuverlässige Abschätzungen der größten Lyapunov-Exponenten, wenn der Rauschpegel R_P gering ist und wir uns an gewisse Grenzen bei der Wahl des Suchradius r_{max} und der Nachbaranzahl $N_{Nachbar}$ halten.

Die Zeitreihen der elektrischen Leitfähigkeit von BSN-Kristallen besitzen nur einen sehr geringen Rauschpegel [17]. Bei typischen Spannungswerten im Bereich von 50 V ergibt sich bei einer Meßgenauigkeit von 0.005 V ein Rauschpegel von $R_P \approx 0.02\%$.

Ein zusätzlicher Effekt auf unsere Abschätzungen ergibt sich durch die periodischen Stabilitätsschwankungen des Stromes. Diese liegen für den Bereich von 0.05mA bis 3mA bei ca. 0.05 % pro Sekunde. Die Periode der Stromschwankungen ist in der Größenordnung von etwa 10s [17]. In Verbindung mit dem geringen Rauschpegel der BSN-Zeitreihen ergibt sich daraus die Grundlage für die zuverlässige Abschätzung des größten Lyapunov-Exponenten von periodischen BSN-Zuständen. Die Begründung ist anschaulich in Abbildung 36 dargelegt.

Die Punkte in Fall (a) repräsentieren trotz des zugrundeliegenden periodischen Orbits eine zufällige lokale Dynamik, die keine sinnvolle Abschätzung der Jacobi-Matrix des Flusses ermöglicht. Für wachsende Rauschpegel ergeben sich dann schnell große Lyapunov-Exponenten, die wir auch bei den Simulationen in Abbildung 16 beobachten. Der Fall (b) zeigt den Einfluß einer periodischen Stabilitätsschwankung des Kontrollparameters auf den Verlauf der Trajektorie. Der periodische Orbit ist nun aufgebläht und besitzt die Form eines Schlauches, dessen Durchmesser von der Amplitude der Stabilitätsschwankung abhängig ist.

In der Realität treten beide Fälle (a) und (b) gleichzeitig auf. Sind die absoluten Rauschpegel gering gegenüber dem Schlauchdurchmesser, so erzeugen die zufälligen Störungen durch weißes Rauschen nur eine leichte Abweichung von der ursprüng-

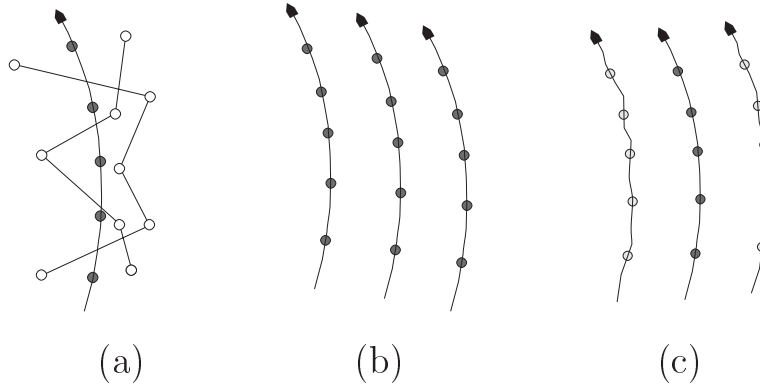


Abbildung 36: Einfluß von weißem Rauschen und von periodischen Stabilitätsschwankungen eines Kontrollparameters auf den Verlauf eines periodischen Orbits, der durch die schwarzen Trajektorienpunkte gekennzeichnet ist. (a): Die Addition von weißem Rauschen erzeugt eine zufällige lokale Dynamik. (b): Periodische Stabilitätsschwankungen eines Kontrollparameters bewirken eine Verrückung der eigentlich periodischen Trajektorie bei jedem Attraktorumfang. Der periodische Zustand besitzt nun die Form eines gefüllten Schlauches. (c): Dargestellt sind beide Einflüsse (a) und (b) zusammen für den Fall eines kleinen Rauschpegels im Vergleich zum Schlauchdurchmesser.

lichen Dynamik, wie in Fall (c) dargestellt ist. Dann kann die Approximation des Flusses durch die Betrachtung von Nachbarschaftsentwicklungen zuverlässig erfolgen und die Abschätzung des größten Lyapunov-Exponenten ist mit hoher Genauigkeit möglich.

Abbildung 37 zeigt den periodischen BSN-Zustand r1b, der auch den Abbildungen 17 und 22 zugrunde liegt, auf die $X_{eof}^{(1)}/X_{eof}^{(2)}$ -Ebene projiziert. Die Ausschnittsvergrößerung bestätigt unsere Überlegungen in deutlicher Weise.

Für die Abschätzung von Lyapunov-Exponenten aus chaotische Zustände treten die Probleme durch weißes Rauschen nur dann auf, wenn der Rauschpegel sehr groß ist oder die positiven Lyapunov-Exponenten des Systems sehr klein sind. Der zweite Punkt trifft auf das in Abbildung 15 untersuchte Mackey-Glass Modell zu, weswegen sich dort die Lyapunov-Exponenten selbst für geringe Rauschpegel nicht sicher bestimmen lassen.

Die Simulationen zum Hyperrössler-Modell in der gleichen Abbildung sind für uns von besonderem Interesse, da die dort auftretenden Lyapunov-Exponenten in der Größenordnung der Lyapunov-Exponenten beim BSN-System liegen. Der in den BSN-Zeitreihen vorhandene Rauschpegel von 0.02% ist um einen Faktor 2 niedriger, als derjenige für den sich die korrekten Lyapunov-Exponenten des Hyperrössler-Modells noch zuverlässig bestimmen lassen. Zusätzlich erwarten wir aufgrund der in Abbildung 36 dargestellten Auswirkung von periodischen Stabilitätsschwankungen des Kontrollparameters eine weitere Erhöhung der Genauigkeit von unseren

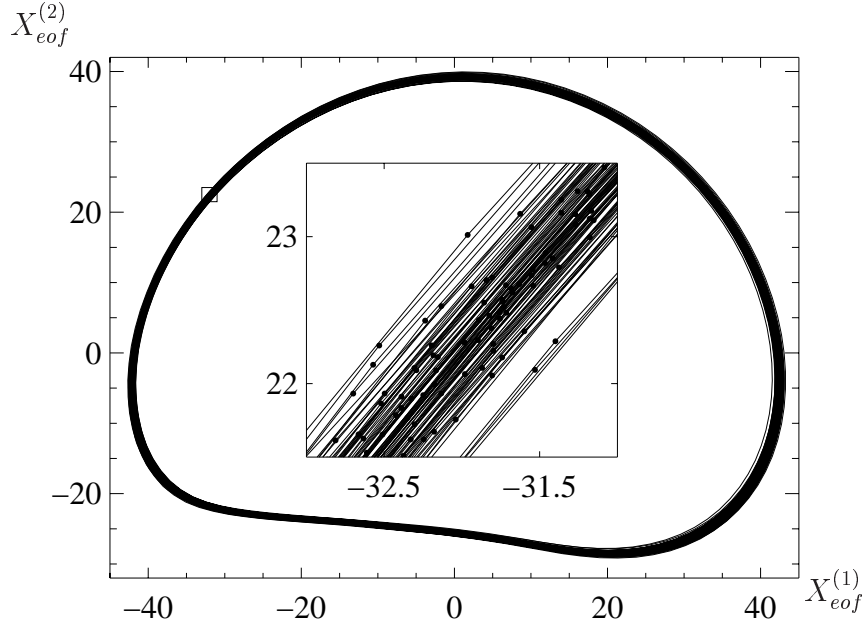


Abbildung 37: Projektion des periodischen BSN-Zustandes r1b auf die $X_{eof}^{(1)}/X_{eof}^{(2)}$ -Ebene. Im Inneren ist eine Ausschnittsvergrößerung zu sehen.

Abschätzungen.

Diese Überlegungen bilden die Grundlage für das starke Vertrauen, welches wir in die Abschätzungen von Lyapunov-Exponenten aus experimentellen BSN-Zeitreihen besitzen. Wir wollen nun im folgenden auf die Ergebnisse eingehen, die wir aus den Untersuchungen zu globalen Lyapunov-Exponenten erhalten haben.

5.1 Globale Dynamik

Aus unseren Untersuchungen ergeben sich maximale Lyapunov-Exponenten für chaotische BSN-Zustände in der Größenordnung von 0.1 s^{-1} . In der Einheit bits pro charakteristischer Zeiteinheit entspricht dies, bezogen auf einen mittleren Attraktorumfang, einem Wert von $\lambda_1^* \approx 3.5$. Dieser Wert ist deutlich größer, als die entsprechenden Werte von bekannten Modellsystemen aus Tabelle 1, die alle im Bereich von $\lambda_1^* \approx 1$ liegen.

Die Untersuchungen zu chaotischen BSN-Zuständen, die in Abbildung 20 und 21 dargestellt sind, erweisen sich als starkes Indiz für das Auftreten von zwei positiven Lyapunov-Exponenten beim BSN-System. Abbildung 38 zeigt eine vergrößerte Darstellung der in Abbildung 26 aufgetragenen beiden größten Lyapunov-Exponenten entlang der RTN-Route. Zusätzlich ist dort auch noch der dritte Lyapunov-Exponent

dargestellt. Innerhalb der RTN-Route beobachten wir chaotische BSN-Zustände mit einem und mit zwei positiven Lyapunov-Exponenten. Aus Abbildung 38 können wir erkennen, daß der Bereich mit nur einem positiven Lyapunov-Exponenten bei etwa 0.84mA sehr schmal ist.

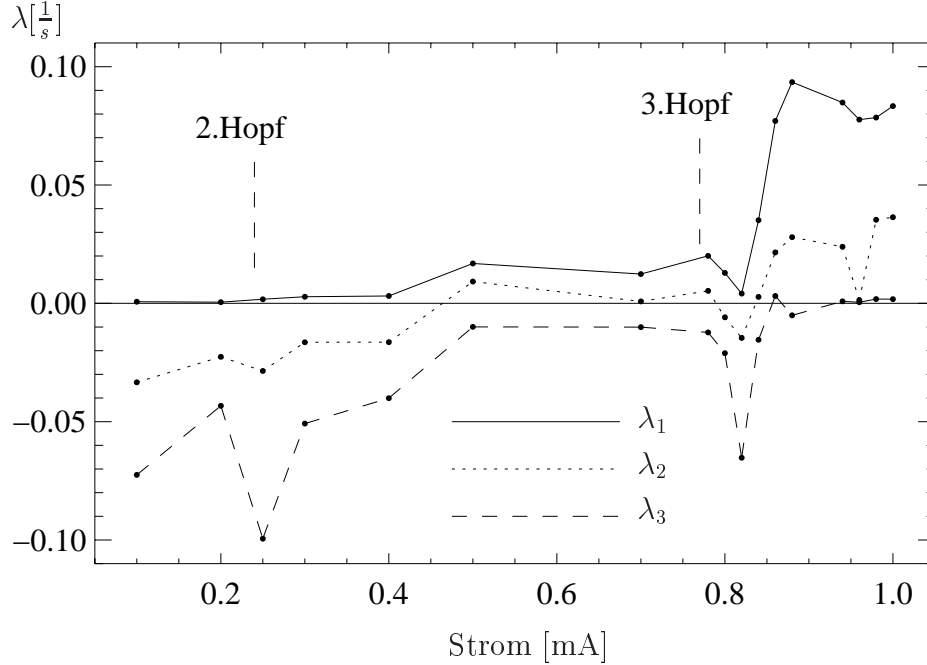


Abbildung 38: Auftragung der drei größten Lyapunov-Exponenten entlang der RTN-Route aus Tabelle 3.

Wir interpretieren diese Ergebnisse als eine kontinuierliche Entwicklung zu einer komplexeren Dynamik mit der Erhöhung des Stromes durch den BSN-Kristall. Durch die Beobachtung eines drittgrößten Lyapunov-Exponenten von näherungsweise Null in den Abbildungen 20 und 21, können wir für diese Zustände eine dritten positiven Lyapunov-Exponenten mit großer Sicherheit ausschließen. Auch im Rahmen der Untersuchungen von chaotischen Zuständen entlang der RTN-Route haben wir keine Anzeichen für einen dritten positiven Lyapunov-Exponenten entdeckt.

In Abbildung 20 erkennen wir einen mit der lokalen Dimension anwachsenden dritten Lyapunov-Exponenten, der für $d_{Lokal} \geq 7$ sogar die Nulllinie überschreitet. Dieses Verhalten läßt sich jedoch durch eine stark anwachsende Anzahl von Fehlern bei der Nachbarsuche für $d_{Lokal} > 6$ begründen, die bei der Abschätzung der Lyapunov-Exponenten aufgetreten sind. Durch die Forderung, daß der Maximalradius r_{max} bei der Nachbarsuche 5% des Attraktordurchmessers nicht überschreiten soll, stoßen wir bei der 60000 Datenpunkte langen Zeitreihe an diese Grenze. In Abbildung 21 können wir für unsere Untersuchungen auf 90000 Datenpunkte zurückgreifen und erhalten dann für diesen chaotischen Zustand eine zuverlässigere Abschätzung der größten

Lyapunov-Exponenten. Die Beobachtung, daß die Lyapunov-Exponenten von beiden chaotischen Zuständen in der selben Größenordnung liegen, bestätigt unsere Wahl von 5% des Attraktordurchmessers als obere Grenze für r_{max} .

In Abbildung 38 läßt sich der frequenzeingerastete periodische Zustand r1n bei $I=0.82\text{mA}$ gut erkennen. Deutlich sieht man einen größten Lyapunov-Exponenten von etwa Null und einen negativen zweitgrößten Lyapunov-Exponenten. Ab $I=0.88\text{mA}$ beobachten wir einen zweiten Lyapunov-Exponenten, der eindeutig größer als Null ist.

Interessant ist die Beobachtung, daß der Zustand r1t bei 0.96mA eine Ausnahme darstellt und wieder einen zweitgrößten Lyapunov-Exponenten von Null zeigt. Der Abschätzung der Lyapunov-Exponenten dieses Zustandes liegen jedoch nur 2425 Datenpunkte zugrunde, so daß dieser Befund auf keiner sicheren Grundlage steht.

Die periodischen und quasiperiodischen Zustände von 0.1 bis 0.7mA sind durch einen größten Lyapunov-Exponenten von Null charakterisiert, der sich in Abbildung 38 zumindest für den Bereich von 0.1 bis 0.4mA nachweisen läßt. Im Bereich von 0.5 bis 0.7mA ist der größte Lyapunov-Exponenten etwas größer als Null, wobei hier nun aber der zweitgrößte Lyapunov-Exponent etwa bei Null liegt, wie wir es für einen quasiperiodischen Zustand erwarten.

Die Begründung für diese Abschätzung läßt sich mit Hilfe von Abbildung 28 veranschaulichen. Der Attraktor r1b stellt einen periodischen Zustand dar, während die Attraktoren r1f und r1i zwei Hauptfrequenzen besitzen, also einen quasiperiodischen Zustand repräsentieren. Für die vorliegende Anzahl von Datenpunkten, die bei der Untersuchung der quasiperiodischen Zustände r1c, r1d und r1e zur Verfügung stehen, müssen wir den Such-Radius für die nächsten Nachbarn so groß wählen, daß wir praktische innerhalb des gesamten Torusquerschnittes suchen und damit die auf einer geringeren Längenskala stattfindende, quasiperiodische Bewegung mit unserem Verfahren nicht auflösen können. Wir beobachten deswegen bei der Abschätzung der Lyapunov-Exponenten für die Zustände im Bereich von $I=0.25\text{mA}$ bis 0.4mA die charakteristischen Merkmale von periodischen Zuständen.

Die quasiperiodischen Zustände ab $I=0.5\text{mA}$ sind zusätzlich durch das Auftreten einer komplizierteren Attraktorstruktur gekennzeichnet, die wir in Abbildung 28 in den Beispielen r1f und r1i in Form von zwei bzw. drei räumlich benachbarten schlauchförmigen Attraktorabschnitten erkennen können. Die nächsten Nachbar, die wir zum Annähern der Jacobi-Matrix des Flusses verwenden, werden nun unter Umständen in unterschiedlichen Attraktorschläuchen gefunden und verschlechtern dadurch die Abschätzung der Lyapunov-Exponenten. Wir beobachten für diese Zustände einen leicht positiven größten Lyapunov-Exponenten in Abbildung 38.

Das schon bei der Betrachtung von Abbildung 19 (kleines Bild) aufgefallene Plateau für $26 \leq N_{Nachbar} \leq 28$ hatten wir als einen Hinweis auf die Attraktorgeometrie interpretiert. Der dieser Untersuchung zugrundeliegende Zustand ist der BSN-Zustand r1i, so daß wir davon ausgehen, daß das Plateau durch die drei schlauchförmigen Attraktorbereiche hervorgerufen wird, die wir in Abbildung 28 (links unten) erken-

nen. Bei Verwendung einer großen Nachbaranzahl umfaßt der Such-Radius dann im Mittel mehrere Attraktorschläuche. Die in Abbildung 19 beobachtete Abnahme des größten Lyapunov-Exponenten mit wachsender Nachbaranzahl, die sich besonders an der Stelle mit $N_{Nachbar}=26$ äußert, führen wir auf die große Anzahl von Nachbarn zurück, welche in diesem speziellen Fall bei der Abschätzung der Jacobi-Matrix eine mittelnnde Wirkung ausüben.

Die Abschätzung der Attraktordimension mit Hilfe der Kaplan-Yorke-Vermutung (4) erweist sich aufgrund dem Auftreten von scheinbaren Lyapunov-Exponenten als schwierig. Scheinbare Lyapunov-Exponenten ergeben sich immer dann, wenn die Dynamik durch mehr Freiheitsgrade approximiert wird, als sie tatsächlich besitzt. Trotz der Verwendung der EOF-Zerlegung bei der Rekonstruktion des Ersatz-Phasenraums (Kapitel 2.3.2) können wir das Auftreten von scheinbaren Lyapunov-Exponenten im allgemeinen nicht unterbinden. Für den BSN-Zustand r1q gilt zum Beispiel $D_2 \approx 3.8$. Wir erhalten jedoch erst für $d_{Lokal}=6$ eine zuverlässige Abschätzung der größten Lyapunov-Exponenten. Wir erwarten dann ein eventuelles Auftreten von zwei scheinbaren Exponenten, die für experimentelle Zeitreihen mit großer Sicherheit unterhalb von Null angetroffen werden [47]. Wenn sich diese nicht zuverlässig identifizieren lassen und bei der Berechnung der Kaplan-Yorke-Dimension nach (4) verwendet werden, ergeben sich im allgemeinen große Fehler bei der Dimensionsabschätzung.

In der Literatur gibt es einige Ansätze zur Identifizierung von scheinbaren Lyapunov-Exponenten [48,71]. Ein bekanntes Verfahren vergleicht die abgeschätzten Lyapunov-Exponenten mit den Abschätzungen für dieselbe rückwärts durchlaufene Zeitreihe. Dabei sollten sich wahre Lyapunov-Exponenten dadurch erkennen lassen, daß sie ihr Vorzeichen umkehren, während scheinbare Exponenten unverändert bleiben. Es ist anschaulich verständlich, daß streckende Richtungen nach der Zeitumkehr zu stauenden Richtungen werden und umgekehrt. Die praktische Umsetzung dieser Idee wird jedoch durch einige Probleme erschwert, so daß wir keine sichere Identifikation von scheinbaren Lyapunov-Exponenten gewährleisten können.

Eine Hauptschwierigkeit besteht in der Beobachtung von Exponenten, die einen betragsmäßig gleich großen Gegenspieler mit entgegengesetztem Vorzeichen besitzen. Dies ist häufig für quasiperiodische Zustände der Fall, wie sich aus Abbildung 38 im Strombereich von 0.5 bis 0.7 mA gut erkennen läßt. In diesem Bereich bilden λ_1 und λ_3 solch ein Paar. Wenn nun nach der zeitumgekehrten Berechnung die gleichen Exponenten wieder beobachtet werden, kann nicht entschieden werden, ob sie beide ihr Vorzeichen umgekehrt haben oder ob sie beide unverändert geblieben sind.

Die Identifikation eines 3-Frequenz-Torus geschieht durch die Abschätzung der drei größten Lyapunov-Exponenten aus experimentellen BSN-Zeitserien. Die theoretisch exakt bei Null liegenden Lyapunov-Exponenten sollten die Bedingung $\lambda_1 \approx 0$, $\lambda_2 \approx 0$ und $\lambda_3 \approx 0$ erfüllen. Die angesprochene Problematik der scheinbaren Lyapunov-Exponenten ist auch hier verantwortlich für eine unsichere Aussage über einen dritten Lyapunov-Exponenten von $\lambda_3 \approx 0$. Für die meisten der innerhalb der RTN-Route beobachteten 2-Frequenz-Tori ergibt sich ein dritter Lyapunov-Exponent in der Größenordnung $|\lambda_3| \approx \lambda_1$, so daß λ_3 innerhalb gewisser Grenzen nahe bei Null

liegt, obwohl ein quasiperiodischer Attraktor mit anderen Methoden erkannt wurde. Für eine eindeutige Identifizierung von 3-Frequenz-Tori muß eine zuverlässige Erkennung von scheinbaren Lyapunov-Exponenten vorausgesetzt werden.

Die Bestimmung der Attraktordimension aus Gleichung (4) wird zusätzlich durch die nur schlecht abschätzbaren negativen Lyapunov-Exponenten erschwert. Die negativen Lyapunov-Exponenten machen sich in der Regel nur am Anfang einer Bewegung bemerkbar, wenn die Dynamik des Systems von dem zugrundeliegenden Attraktor angezogen wird [48]. Nach Ablauf der Transiente lassen sie sich nur selten zuverlässig bestimmen. Alle in dieser Arbeit verwendeten BSN-Zeitreihen sind nach Ablauf der Transiente untersucht worden, so daß wir uns aus diesem Grund bei unseren Betrachtungen auch nur auf die größten Lyapunov-Exponenten beziehen.

Der Zusammenhang (5) erlaubt eine direkte Abschätzung der Kolmogorov-Entropie K_1 durch die Summe der positiven Lyapunov-Exponenten. Die größte Entropie, die wir bei BSN-Zuständen beobachten liegt im Bereich von $K_1 \approx 0.12$. Dies ist nur ca. ein Viertel der mit dem Grassberger-Procaccia-Algorithmus bestimmten Entropie K_2 . Wir nehmen an, daß sich die Korrelationsentropie K_2 nur innerhalb eines großen Fehlerbereiches angeben läßt und bei genauerer Betrachtung korrigiert werden muß. Ein starkes Indiz für die genauere Abschätzung der Entropie K_1 durch Lyapunov-Exponenten ist die Beobachtung, daß die mit unserem Verfahren aus experimentellen Zeitreihen bestimmten Lyapunov-Exponenten im allgemeinen eine obere Grenze darstellen. Rauscheinflüsse oder eine fehlerhafte Flußapproximation beeinflussen die Abschätzung der positiven Lyapunov-Exponenten im allgemeinen in Richtung größerer Werte.

Wir haben uns in diesem Abschnitt mit der globalen Dynamik des BSN-Systems auseinandergesetzt. Darunter haben wir die globalen Eigenschaften der Dynamik verstanden, die wir mit globalen Lyapunov-Exponenten charakterisiert haben. Im nächsten Abschnitt wollen wir die Ergebnisse zu lokalisierten Lyapunov-Exponenten von BSN-Zuständen besprechen.

5.2 Lokale Dynamik

Zu Beginn unserer Ausführungen wollen wir noch einmal betonen, daß die Untersuchungen zu lokalisierten Lyapunov-Exponenten von experimentellen BSN-Zeitreihen ausnahmslos im rekonstruierten Ersatz-Phasenraum durchgeführt werden. Dieser abstrakte Zustandsraum repräsentiert zwar die globalen Eigenschaften der Dynamik korrekt. Er steht aber in keinem direkten Zusammenhang mit dem Original-Phasenraum, der durch physikalisch sinnvolle Koordinaten aufgespannt wird.

In Abbildung 22 erkennen wir, daß der Zustand r1b während eines Attraktorumlaufs, der ca. 20.4s dauert, 6 Bereiche mit abwechselnd positiven und negativen Abschnitten der Größe $\tilde{\lambda}_{t_0}^{(1)}(t, s_{max})$ besitzt. Sie beschreibt die Mittelwerte der lokalen Beiträge zum globalen Lyapunov-Exponenten aus einem begrenzten Bereich um den jeweiligen Trajektorienpunkt. Diese charakteristischen positiven und negativen Abschnitte

sind mit den Buchstaben A-F bzw. mit A'-F' für den darauffolgenden Attraktorumlauf gekennzeichnet und lassen sich auch direkt in der dreidimensionalen Abbildung 28 (links oben) wiederfinden. Der willkürlich gewählte Startzeitpunkt von $t_0=60s$ setzt das System in den grün-gelben Attraktorbereich auf der uns zugewandten Seite. Das grün-gelbe Muster beschreibt das Abwechseln von Abschnitten verschiedener lokalisierter Lyapunov-Exponenten auf einer kleinen Zeit- und Längenskala, die sich auch in Abbildung 22 durch die dem Bereich A überlagerte Schwingung äußert.

Wir beobachten dieses Phänomen auch für andere Zeitreihen entlang der RTN-Route. Es läßt sich in den Farbgraphiken 28 für die Zustände r1f,r1i,r1k und r1n erkennen. Die naheliegende Vermutung, daß diese Beobachtung ein Artefakt der Phasenraum-Einteilung mit der Vektorquantisierung ist, können wir nicht bestätigen. Untersuchungen mit 100, 500 und 1000 verwendeten Zellen zeigen eindeutig, daß sich diese periodische Überlagerung als eine Eigenschaft der Dynamik äußert.

Anhand der Abbildungen 22 und 28 (oben links) erkennen wir auch den Umlaufsinn der Trajektorie. Bezogen auf die Projektion in die $X_{eof}^{(1)}/X_{eof}^{(2)}$ -Ebene ist der Umlaufsinn mathematisch positiv. Diese Beobachtung gilt im übrigen auch für alle anderen Attraktoren, die in den Abbildungen 28 und 29 dargestellt sind.

In den Abbildungen 26 und 27 untersuchen wir die normierten Häufigkeitsverteilungen der Beiträge $R_1 = \left(\frac{\ln|r_{11}|}{T_E \cdot \Delta t} \right)$ zum globalen Lyapunov-Exponent λ_1 . Wir erkennen aus beiden Abbildungen, daß die chaotischen Zustände einen höheren Anteil von positiven Beiträgen R_1 zum globalen Lyapunov-Exponent λ_1 besitzen, während das Maximum seine Lage in der Nähe des Nullpunktes nur leicht verändert. In Abbildung 27 stellen wir nur Beiträge R_1 dar, die eine geringere normierte Häufigkeit n_{λ_1} als 0.25 aufweisen. Gleichzeitig überdecken wir einen weiten Bereich von R_1 , so daß sich die erhöhten Anteile von R_1 für die chaotischen Zustände gut erkennen lassen. Der periodische Zustand r1b bei $I=0.2mA$ fällt in dieser Darstellung sofort auf. Seine breite Verteilung basiert auf nur einigen wenigen Ausreißern mit großen Beträgen $|R_1|$, die bei der Bestimmung der Lyapunov-Exponenten aufgetreten sind.

Wir wollen nun auf die Entwicklung der lokalisierten Lyapunov-Exponenten entlang der RTN-Route eingehen. Dazu werden wir die Farbgraphiken 28 und 29 verwenden. Zuvor möchten wir aber noch auf einen Punkt hinweisen, der die folgenden Interpretationen von einer anderen Seite aus betrachtet. Die Untersuchungen zu lokalisierten Lyapunov-Exponenten in einem abstrakten Ersatz-Phasenraum beschreiben die Dynamik des BSN-Systems ohne die direkte Verbindung zu physikalischen Größen zu ziehen. Die dynamischen Kenntnisse über das BSN-System lassen sich jedoch zur Steuerung und Regelung ausnutzen.

Unter diesem Gesichtspunkt lassen sich auch die Ergebnisse aus Abbildung 22 verwenden. Eine größere Anzahl von abwechselnden positiven und negativen Bereichen bietet häufiger die Möglichkeit zu Steuereingriffen, die jedoch aufgrund der geringeren Breite dieser Abschnitte dann auch in einer kürzeren Zeit stattfinden müssen.

Als charakteristisches Merkmal aller 8 BSN-Zustände in Abbildung 28 und 29 be-

obachten wir mindestens einen markanten Attraktorabschnitt, in dem der größte lokalisierte Lyapunov-Exponent im positiven, roten Farbbereich liegt. Dieser Bereich ist es dann auch, in dem sich der Attraktor deutlich verändert. Wir erkennen dies direkt beim Übergang von Zustand r1n in den Zustand r1o in Abbildung 29 (oben). Die Projektion auf die $X_{eof}^{(1)}/X_{eof}^{(2)}$ -Ebene zeigt deutlich wie sich aus dem Attraktorabschnitt mit dem größten lokalisierten Lyapunov-Exponenten in Zustand r1n zwei schlauchförmige Attraktorbereiche in Zustand r1o ausgebildet haben.

Für die beiden chaotischen Zustände r1q und r1v erkennen wir, daß sich der Attraktor in zwei Abschnitte einteilen läßt, wovon sich ein Gebiet durch große lokalisierte Lyapunov-Exponenten auszeichnet. Eine mögliche Erklärung für diese Beobachtung können wir in Abbildung 25 erkennen. Dort ist der chaotische Zustand r1v einmal als Projektion auf die $X_{eof}^{(1)}/X_{eof}^{(2)}$ -Ebene und einmal als Schnitt durch die zur $X_{eof}^{(1)}/X_{eof}^{(3)}$ parallelen Ebene an der Stelle $X_{eof}^{(2)} = -0.6$ dargestellt. Die Farbskala aus Abbildung 25 ist direkt auf den Wertebereich der lokalisierten Lyapunov-Exponenten von Zustand r1v zugeschnitten, so daß sich eine detaillierter Darstellung ergibt.

Der Schnitt läßt vermuten, daß der chaotische Zustand durch das Aufbrechen eines Torus entstanden ist, von dem sich noch deutlich die Umriße erkennen lassen. Wir beobachten erneut, daß nur in einem begrenzten Bereich $X_{eof}^{(1)} < 0$ große lokalisierten Lyapunov-Exponenten angetroffen werden, während für $X_{eof}^{(1)} > 0$ eine relativ gleichmäßige Verteilung der $\lambda_{lok,1}$ um einen deutlich niedrigeren Wert zu erkennen ist.

In Abbildung 24 sind die beiden größten lokalisierten Lyapunov-Exponenten von einem Schnitt durch einen 2-Frequenz-Torus dargestellt. Durch die Verwendung einer Farbskala, die der Variation der lokalisierten Lyapunov-Exponenten über den Schnitt angepaßt ist, erhalten wir auch hier eine hohe Auflösung der lokalisierten Lyapunov-Exponenten. Wir beobachten charakteristische Bereiche, die durch große $\lambda_{lok,1}$ gekennzeichnet sind und sich in der rechten Torushälfte befinden. Für diese Gebiete besitzt auch der zweitgrößte lokalisierte Lyapunov-Exponent $\lambda_{lok,2}$ deutlich positive Werte.

Zusammenfassend können wir feststellen, daß sich die Dynamik der untersuchten BSN-Zustände mit wachsendem Strom durch den BSN-Kristall durch eine erhöhte Komplexität auszeichnet. Diese Beobachtung wird insbesondere durch zwei positive Lyapunov-Exponenten für chaotische BSN-Zustände und mit der komplizierteren Attraktorstruktur der einzelnen Zustände entlang der RTN-Route ins Chaos belegt. Zwei positive Lyapunov-Exponenten besitzen darüberhinaus für mögliche zukünftige Untersuchungen zur Steuerung und Regelung des BSN-Systems eine große Bedeutung, da viele der bekannten Verfahren bisher nur auf eine chaotische Dynamik mit einem positiven Lyapunov-Exponenten angewendet werden [72–74].

5.3 Ergebnisse zur BSN-Modellgleichung

Wir wollen in diesem Abschnitt die Simulationsergebnisse zur BSN-Modellgleichung (6) diskutieren. Eine uns interessierende Frage betrifft das dynamische Verhalten der Gleichung. Wir haben während unserer Betrachtungen zahlreiche Parametereinstellungen untersucht, aber in keinem Fall einen chaotischen Zustand angetroffen.

Die meisten Untersuchungen führen zu einem singulärem Zustand mit $U_p \rightarrow -\infty$. Die periodischen Lösungen, die sich aus experimentell bestimmten Parametervektoren ergeben, erwecken den Anschein von periodischen Inseln in einer Fixpunktlandschaft. Eine Begründung für dieses Verhalten könnte unserer Meinung nach in der näherungsweisen Linearität der Terme $e^{k_3 \cdot U_p(t)}$ und $e^{k_5 \cdot U_p(t-k_6)}$ liegen, die in Abbildung 30 dargestellt ist. Zum Vergleich betrachten wir in Abbildung 39 die entsprechenden Terme aus dem Mackey-Glass Modell.

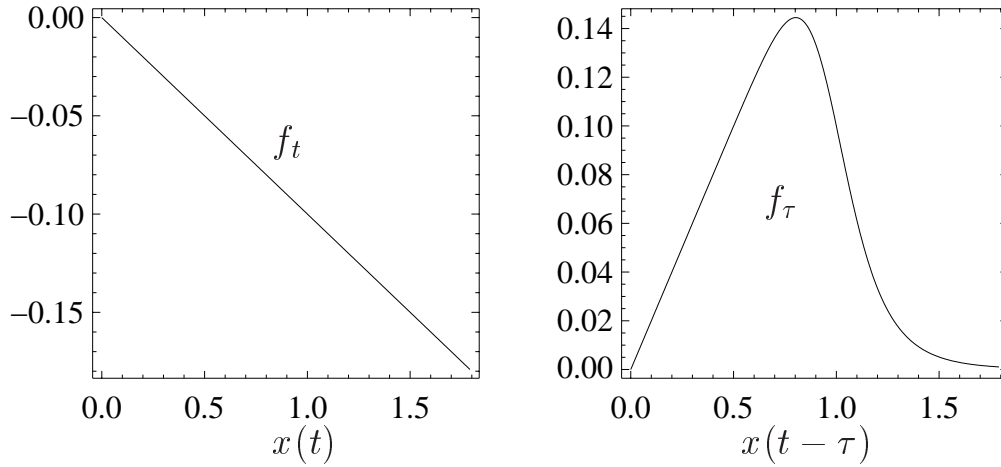


Abbildung 39: Gezeigt sind die Funktionen $f_t = -b \cdot x(t)$ und $f_\tau = \frac{a \cdot x(t-\tau)}{1+x^c(t-\tau)}$ aus dem Mackey-Glass Modell für $a=0.2$, $b=0.1$ und $c=10$, um den deutlich unterschiedlichen Verlauf des Delayterms aus der Delay-Differentialgleichung (21) gegenüber der BSN-Modellgleichung (6) darzulegen.

Der Term $f_t(x)$ stellt einen linearen Zusammenhang dar, wie wir auch näherungsweise beim BSN-Modell beobachten. Wir erkennen jedoch einen deutlichen Unterschied beim Vergleich des Terms f_τ , der beim Mackey-Glass Modell einen ausgeprägt nicht-linearen Verlauf darstellt und durch ein einzelnes Maximum gekennzeichnet ist.

Die Ergebnisse zu den Berechnungen von Lyapunov-Exponenten in Abbildung 33 zeigen sehr deutlich, daß die periodische Dynamik zwischen $\tau=28$ und 28.5 durch einen markanten Übergang ausgezeichnet ist. Wir erkennen aus Abbildung 34 links am Beispiel für $\tau=32.15$, wie die Polarisationsspannung $U_p(t)$ steil abfällt und gegen

$-\infty$ strebt.

Der Bereich $\tau < 28$ ist in Abbildung 33 zusätzlich vergrößert dargestellt. Wir führen den beobachteten gekrümmten Verlauf des größten Lyapunov-Exponenten auf numerische Artefakte zurück. Der markante Einschnitt im Bereich von $\tau=17$ bis 19 zeigt bei Untersuchung der zugehörigen Zeitreihen an dieser Stelle keine besonderen Merkmale. Wir vermuten, daß hierfür die auch schon in Abbildung 32 aufgefallenen Probleme bei der Bestimmung von Lyapunov-Exponenten von exakt Null verantwortlich sind für die wir keine vernünftige Erklärung besitzen.

Beim Vergleich der Abbildungen 35 und 22 erkennen wir, daß die Betrachtung mit der BSN-Modellgleichung durch nur zwei charakteristische Bereiche der Größe $\tilde{\lambda}_{t_0}^{(1)}(t, s_{max})$ über einen Attraktorumlauf ausgezeichnet ist, während wir bei dem experimentellen periodischen BSN-Zustand aus Abbildung 22 insgesamt sechs deutlich trennbare Bereiche beobachten. Weitere Untersuchungen zu experimentellen periodischen BSN-Zuständen zeigen, daß auch diese durch mehr als zwei charakteristische Bereiche gekennzeichnet sind.

Wir werten dieses Ergebnis jedoch nicht zu stark, da wir die schon in Abbildung 32 beobachteten Schwierigkeiten bei der Bestimmung von Lyapunov-Exponenten von periodischen Zuständen auch in Abbildung 35 wiederfinden. Der größte globale Lyapunov-Exponent für diese Abbildung liegt bei etwa -0.0055 s^{-1} , wie wir in Abbildung 34 (rechts) sehen können. Auch aus Abbildung 35 erkennen wir, daß der Mittelwert der Größe $\tilde{\lambda}_{t_0}^{(1)}(t, s_{max})$ unter Null liegt, da die Flächen mit $\tilde{\lambda}_{t_0}^{(1)}(t, s_{max}) < 0$ erkennbar größer sind, als die Flächen mit $\tilde{\lambda}_{t_0}^{(1)}(t, s_{max}) > 0$.

5.4 Ausblick

Wir sind bei den Untersuchungen innerhalb dieser Arbeit auf einige Anregungen und Ideen gestoßen, die zusätzlich durchgeführt werden könnten, um die vorgestellten Ergebnisse zu untermauern und zu erweitern.

Ein wünschenswertes Ziel wäre die zuverlässige Abschätzung von scheinbaren Lyapunov-Exponenten. Damit könnten die Dimensionsabschätzungen mit der Kaplan-Yorke-Vermutung zuverlässiger durchgeführt werden. Gleichzeitig ergibt sich dadurch die Möglichkeit, einen 3-Frequenz-Torus aus experimentellen BSN-Zeitreihen mit der Bestimmung der drei größten Lyapunov-Exponenten nachzuweisen.

Durch die Untersuchung der lokalisierten Lyapunov-Exponenten im Ersatz-Phasenraum stellen wir die Grundlage bereit, das BSN-System zu steuern oder zu regeln. Aufgrund der zwei positiven Lyapunov-Exponenten, die wir für chaotische BSN-Zustände beobachtet haben, bietet sich das BSN-System für Untersuchungen in dieser Richtung sinnvoll an, da viele der bisher bekannten Steuer- und Regelstrategien nur an Systemen mit einem positiven Lyapunov-Exponenten erprobt werden.

In diesem Zusammenhang kann auch eine Ausdehnung der Untersuchungen zur Anzahl der positiven Lyapunov-Exponenten von BSN-Zuständen geschehen. Eine interessante Frage ist, ob sich für größere Ströme durch den BSN-Kristall auch dritt- und viertgrößte positive Lyapunov-Exponenten beobachten lassen.

Die Simulationen zu der BSN-Modellgleichung könnten durch die Kopplung von mehreren Gleichungen erweitert werden. Im Rahmen von optischen Untersuchungen zu BSN-Kristallen gibt es starke Hinweise dafür, daß sich bei chaotischen BSN-Zuständen mehrere Domänen von OH^- -Ionen durch den Kristall bewegen [22]. Um die Berechnung von Lyapunov-Exponenten mit gekoppelten Delaygleichungen durchzuführen, ist eine Erweiterung der in dieser Arbeit vorgestellten Verfahren nötig, die jedoch auf der Basis dieser Ansätze geschehen kann.

6 Zusammenfassung

Wir haben uns mit der Leitfähigkeitsdynamik von Barium-Natrium-Niobat-Kristallen (BSN-Kristallen) auseinandergesetzt und haben verschiedene Untersuchungen zum Themenkreis Lyapunov-Exponenten anhand von experimentellen BSN-Zeitreihen durchgeführt. Als einen typischen größten Lyapunov-Exponenten von chaotischen BSN-Zuständen erhalten wir Werte in der Größenordnung von 0.1 s^{-1} . Der Maximalwert entspricht ca. 3.5 bits pro Attraktorumlauf.

Wir beobachten für die Mehrzahl der chaotische BSN-Zustände entlang der untersuchten Ruelle-Takens-Newhouse-Route (RTN-Route) zwei positive Lyapunov-Exponenten mit einem schmalen Übergangsbereich in dem wir nur einen positiven Lyapunov-Exponenten erkennen. Diesen Befund interpretieren wir als eine komplexer werdende Dynamik mit wachsender Stromstärke durch den Kristall, die wir auch durch eine kompliziertere Attraktorstruktur der BSN-Zustände entlang der RTN-Route ins Chaos bestätigen können.

Die Abschätzung von Lyapunov-Exponenten der BSN-Zustände entlang der RTN-Route bestätigen die meisten der Ergebnisse, die wir bisher mit anderen Verfahren erhalten haben. Die Kolmogorov-Entropie K_1 , die wir mit Gleichung (5) aus den positiven Lyapunov-Exponenten bestimmen, ist allerdings um etwa einen Faktor vier kleiner als Abschätzungen der Entropie K_2 , die sich aus Korrelationsbetrachtungen in vorangegangenen Untersuchungen ergeben haben.

Durch die Untersuchungen zu lokalisierten Lyapunov-Exponenten erhalten wir eine detailliertere Beschreibung der BSN-Dynamik im rekonstruierten Ersatz-Phasenraum. Wir erkennen an verschiedenen Beispielen, daß die Attraktoren von BSN-Zuständen entlang der RTN-Route durch mindestens einen markanten Bereich mit großen positiven lokalisierten Lyapunov-Exponenten ausgezeichnet sind. Bezüglich der Variation der Attraktoren entlang der RTN-Route beobachten wir, wie sich bevorzugt diese Bereiche in ihrer Form verändern. Die chaotischen Zustände sind durch eine Attraktorregion ausgezeichnet, die einen sichtbar größeren lokalisierten Lyapunov-Exponenten besitzt, als die restlichen Gebiete. Wir führen diese Beobachtung auf das lokale Aufbrechen eines 2-Frequenz-Torus zurück und können diese Vermutung durch Untersuchungen zu einem chaotischen Zustand aus der RTN-Route belegen.

Die Simulationsergebnisse zur BSN-Modellgleichung zeigen, daß die Gleichung innerhalb der untersuchten Parameterbereiche kein chaotisches Verhalten generiert. Die aus experimentellen Daten angepaßten Parametervektoren \vec{k} deuten darauf hin, daß die Lösungen periodische Inseln in einer Fixpunktlandschaft darstellen. Mit den entwickelten Methoden zur Bestimmung von Lyapunov-Exponenten aus Delay-Differentialgleichungen stellen wir die Grundlage bereit, um zukünftige Untersuchungen an gekoppelten Modellgleichungen durchführen zu können.

7 Anhang

Die folgenden vier Modellsysteme werden für Testberechnungen innerhalb dieser Arbeit verwendet. Angegeben sind die jeweiligen Differentialgleichungen, die verwendeten Parameter und die Startwerte, die für die verschiedenen Untersuchungen eingesetzt werden.

Lorenz-Modell [26]:

$$\begin{aligned}\dot{X}_1 &= -\sigma \cdot X_1 + \sigma \cdot X_2 \\ \dot{X}_2 &= -X_1 \cdot X_3 + R \cdot X_1 - X_2 \\ \dot{X}_3 &= X_1 \cdot X_2 - b \cdot X_3\end{aligned}$$

Die Parameter für die Untersuchungen zu chaotischen Zuständen des Lorenz-Modells sind: $\sigma=16$, $R=45.92$ und $b=4.0$. Als Startwerte verwenden wir $X_1=10.48$, $X_2=16.35$ und $X_3=20.66$. Den Zeitreihen, die zu Testuntersuchungen von Rauscheinflüssen bei der Abschätzung von Lyapunov-Exponenten periodischer Zustände verwendet werden, liegen folgende Einstellungen zugrunde: $\sigma=10$, $R=294$, $b=\frac{8}{3}$, $X_1=0$, $X_2=1$ und $X_3=0$. Als Zeitschrittweite bei der Integration verwenden wir $\Delta t=0.01$ Zeiteinheiten für die Berechnungen in Tabelle 1 und $\Delta t=0.02$ Zeiteinheiten für die Testuntersuchungen in Abbildung 16.

Rössler-Modell [75]:

$$\begin{aligned}\dot{X}_1 &= -X_2 - X_3 \\ \dot{X}_2 &= X_1 + a \cdot X_2 \\ \dot{X}_3 &= b + (X_1 - c) \cdot X_3\end{aligned}$$

Die Berechnungen der Zeitreihen für die Testuntersuchungen aus Abbildung 14 und die Bestimmung der Lyapunov-Exponenten in Tabelle 1 wird mit den Parametern $a=0.15$, $b=0.20$ und $c=10.0$ durchgeführt. Als Startwert setzen wir $X_1=1$, $X_2=2$ und $X_3=3$ und benutzen eine Integrationszeit von $\Delta t=0.01$ Zeiteinheiten für die Berechnungen in Tabelle 1 und $\Delta t=0.02$ Zeiteinheiten in Abbildung 14.

Hyperrössler-Modell [76]:

$$\begin{aligned}\dot{X}_1 &= -X_2 - X_3 \\ \dot{X}_2 &= X_1 + a \cdot X_2 + X_4 \\ \dot{X}_3 &= b + (X_1 - c) \cdot X_3 \\ \dot{X}_4 &= c \cdot X_4 + d \cdot X_3\end{aligned}$$

Die Testberechnungen mit dem Hyperrössler-Modell werden mit den Parametern $a=0.25$, $b=3.0$, $c=0.05$ und $d=0.5$ durchgeführt. Wir benutzen eine Integrationszeit von $\Delta t=0.01$ Zeiteinheiten für die Berechnung der Lyapunov-Exponenten aus Tabelle 1 bzw. von $\Delta t=0.02$ Zeiteinheiten für die Erzeugung der Zeitreihen, die in Abbildung 15 betrachtet werden. Die Startwerte sind für beide Fälle $X_1=-39.942$, $X_2=12.569$, $X_3=0.075$ und $X_4=19.504$.

Mackey-Glass Modell [54]:

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{a \cdot x(t - \tau)}{1 + x^c(t - \tau)} - b \cdot x(t)$$

Wir verwenden für alle Berechnungen die Parameter $a=0.2$, $b=0.1$, $c=10$ und einen konstanten Startwert $x_0=0.16$ im Intervall $t \in [-\tau, 0]$. Für die Berechnung der ersten vier Lyapunov-Exponenten in Tabelle 1 und die Testuntersuchungen in Abbildung 15 verwenden wir $\tau=30$ und die direkte Methode aus Kapitel 3.3.1 mit einer Integrationsschrittweite von $\Delta t=0.05$ Zeiteinheiten. Die Berechnungen zur Prüfung unserer Algorithmen zur Bestimmung von Lyapunov-Exponenten aus Delay-Differentialgleichungen in Kapitel 4.4 führen wir mit $\tau=24$ und $\Delta t=0.05$ Zeiteinheiten durch.

8 Literaturverzeichnis

- [1] J. Gleick. *Chaos - Making a new Science*. Penguin Books, 1987.
- [2] R.W. Leven, B.-P. Koch und B. Pompe. *Chaos in dissipativen Systemen*. Akademie-Verlag, Berlin, 1989.
- [3] J. Briggs und F.D.Peat. *Die Entdeckung des Chaos*. Hanser, München, 1990.
- [4] H. G. Schuster. *Deterministic chaos: An introduction*. VCH, Weinheim, 1988.
- [5] J.P.Crutchfield, J.D.Farmer, N.H.Packard und R.S.Shaw. *Chaos*. Spektrum der Wissenschaft, (Februar), 1987.
- [6] W. Martienssen, U. Krüger, M. Bauer und H. Heng. Gesetz und Zufall in der Natur. In *Verhandlungen der Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Ärzte*, Seiten 77–99, Stuttgart, 1989. Wissenschaftliche Verlagsgesellschaft.
- [7] H.-J. Lange. *Die Chaostheorie und mögliche Anwendungen auf das Wetter- und Klimasystem*. Tatort Erde, Seiten 270–292, 1992.
- [8] L.F. Olsen und H. Degn. *Chaos in biological systems*. Quaterly Review of Biophysics, **18**(2), 165–225, 1985.
- [9] N.S. Glance und B.A. Huberman. *Dynamics of social dilemmas*. Scientific American, **270**(3), 76–81, March 1994.
- [10] W.A. Brock. *Nonlinearity and complex dynamics and economics and finance*. Addison-Wesley, 1988.
- [11] K. Krischer, R. Rico Martinez, I.G. Kevrekidis, H.H. Rotermund, G. Ertl und J.L. Hudson. *Model Identification of a Spatiotemporally Varying Catalytic Reaction*. AIChE Journal, **39**, 89, 1993.
- [12] K.M. Mayer, J. Parisi, J. Peinke und R.P. Huebener. *Resonance Imaging of Dynamical Filamentary Current Structures in a Semiconductor*. Physica D, **32**, 306, 1988.
- [13] W.Martienssen et al. *Nichtlineare Dynamik - Chaos und Ordnung in der Natur*. Schriftliches Studienmaterial zur HVV/FH-Veranstaltung - siehe zum Beispiel Kapitel 2, 1992.
- [14] P.E. Wigen. *Nonlinear phenomena and chaos in magnetic materials*. World Scientific Publ., New Jersey, 1994.
- [15] S. Martin, H. Leber und W. Martienssen. *Oscillatory and Chaotic States of the Electrical Conduction in BSN Crystals*. Phys. Rev. Lett., **53**, 303, 1984.
- [16] S. Martin und W. Martienssen. *Spatio-Temporal Electrical Instabilities in BSN Crystals*. Physica D, **23**, 195, 1986.

- [17] Thorsten Schneider. *Über die Dynamik der Hochtemperatur - Leitfähigkeit von BSN Kristallen*. Diplomarbeit, Johann Wolfgang Goethe-Universität Frankfurt/Main, Mai 1992.
- [18] S. Martin und W. Martienssen. Transition from quasiperiodicity into chaos in the periodically driven conductivity of BSN crystals. In G. Mayer-Kress, editor, *Dimensions and entropies in chaotic systems*, Seiten 191–197. Springer, Berlin, 1986.
- [19] Th. Schneider, H. Heng und W. Martienssen. *Stable three-frequency quasiperiodicity in conductivity oscillations of BSN crystals*. Europhys. Lett., **22**(7), 499, 1993.
- [20] H. Heng, Th. Schneider und W. Martienssen. Spatial and Temporal Pattern Analysis for Barium-Sodium-Niobate Crystals. In *Physics Computing 94*, Lugano, 1994.
- [21] Christof Wege. *Korrelationen der Leitfähigkeit und Doppelbrechung von Barium-Natrium-Niobat*. Diplomarbeit, Johann Wolfgang Goethe-Universität Frankfurt/Main, Februar 1994.
- [22] Ingo Antony-Spies. *Raumzeitliche Strukturbildung der elektrischen Leitfähigkeit in BSN Kristallen*. Diplomarbeit, Johann Wolfgang Goethe-Universität Frankfurt/Main, May 1995.
- [23] Th. Schneider, H. Heng und W. Martienssen. *Adapting a nonlinear model to conductivity oscillations in BSN crystals*. to be subm. to Physica D, 1995.
- [24] Heiner Heng. *Räumliche und zeitliche Strukturbildung beim Ladungstransport in Festkörpern (BSN)*. Dissertation, Johann Wolfgang Goethe-Universität Frankfurt/Main, 1995.
- [25] Herbert Reininger. *Prinzipien der digitalen Sprachcodierung und ihre Anwendung zur Sprachübertragung über Fadingkanäle bei mittleren Datenraten*. Dissertation, Johann Wolfgang Goethe-Universität Frankfurt/Main, 1987.
- [26] N. Lorenz. *Deterministic nonperiodic flow*. J. Atmos. Sci., **20**, 130, 1963.
- [27] Jean-Pierre Eckmann und David Ruelle. *Ergodic theory of chaos and strange attractors*. Rev. Mod. Phys., **57**(3), 617–656, 1985. addendum vol. 57, p. 1115.
- [28] B. Mandelbrot. *The fractal geometry of nature*. Freeman, San Francisco, 1982.
- [29] H. G. E. Hentschel und I. Procaccia. *The infinite number of generalized dimensions of fractals and strange attractors*. Physica D, **8**, 435–444, 1983.
- [30] P. Grassberger und I. Procaccia. *Characterization of strange attractors*. Phys. Rev. Lett., **50**(5), 346–349, 1983.
- [31] C. E. Shannon und W. Weaver. *The mathematical theory of information*. University Press, Urbana Ill., 1949.

- [32] A. N. Kolmogorov. *Über die Entropie zur Zeit eins als metrische Invariante von Automorphismen (in russ.)*. Dokl. Akad. Nauk SSSR, **124**, 754, 1959.
- [33] P. Grassberger und I. Procaccia. *Estimation of the Kolmogorov entropy from a chaotic signal*. Phys. Rev. A, **28**(4), 2591–2593, 1983.
- [34] M. W. Hirsch und S. Smale. *Differential equations, dynamical systems, and linear algebra*. Academic Press, New York, 1974.
- [35] H. Heuser. *Lehrbuch der Analysis II*. B.G. Teubner, Stuttgart, 1990.
- [36] J. L. Kaplan und J. A. Yorke. Chaotic behavior of multidimensional difference equations. In H.-O. Peitgen et al., editor, *Functional Differential Equations and Approximation of Fixed Points*, volume 730 of *Lecture Notes in Mathematics*, Seite 228. Springer, Berlin, 1979.
- [37] D. A. Russel, J. D. Hanson und E. Ott. *Dimension of strange attractors*. Phys. Rev. Lett., **45**, 1175–1178, 1980.
- [38] L. S. Young. *Dimension, entropy, and Lyapunov exponents*. Ergodic Theory & Dynamical Systems, **2**, 109, 1982.
- [39] M. J. Feigenbaum. *Universal behavior in nonlinear systems*. Physica D, **7**, 16–39, 1983.
- [40] S. E. Newhouse, David Ruelle und F. Takens. *Occurrence of strange axiom A attractors near quasi-periodic flows on T^m ($m=3$ or more)*. Commun. Math. Phys., **64**, 35–40, 1978.
- [41] Helmut Leber. *Herstellung und Untersuchung von Barium-Natrium-Niobat-Einkristallen für optische Anwendungen*. Dissertation, Johann Wolfgang Goethe-Universität Frankfurt/Main, 1982.
- [42] L.G. Van Uitert, J.J. Rubin und W.A. Bonner. *K-1 Growth of $Ba_2NaNb_5O_{15}$ Single Crystals for Optical Applications*. IEEE J. Quantum Optics, **4**(10), 622, 1968.
- [43] H. Yanagida, R.J. Brook und F.A. Kröger. *Direct current-voltage characteristics of calcia stabilized zirconia with porous platinum electrodes*. J. electrochem. Soc., **117**, 593, 1970.
- [44] N. H. Packard, J. P. Crutchfield, J. D. Farmer und R. S. Shaw. *Geometry from a time series*. Phys. Rev. Lett., **45**, 712–716, 1980.
- [45] F. Takens. *Detecting strange attractors in turbulence*, volume 898 of *Lecture Notes in Mathematics*, Seiten 365–381. Springer, Berlin, 1981.
- [46] J. D. Farmer und J. J. Sidorowich. Exploiting chaos predict the future and reduce noise. In Y. S. Lee, editor, *Evolution, Learning, and Cognition*, Seiten 265–289. World Scientific, Singapore, 1988.
- [47] Jean-Pierre Eckmann, S. Olifson Kamphorst, David Ruelle und S. Ciliberto. *Liapunov Exponents from Time Series*. Phys. Rev. A, **34**(6), 4971–4979, 1986.

- [48] R. Brown, P. Bryant und H. D. I. Abarbanel. *Computing the Lyapunov spectrum of a dynamical system from the observed time series*. Phys. Rev. Lett., **65**, 1523–1526, 1990.
- [49] Henry D. I. Abarbanel, Reggie Brown, John L. Sidorowich und Lev Sh. Tsimring. *The Analysis of Observed Chaotic Data in Physical Systems*. Rev. Mod. Phys., **65**(4), 1331–1392, 1993.
- [50] H. Herzel, K. Krischer, D. Berry und I. Tietze. Analysis of Spatio-Temporal Patterns by Means of Empirical Orthogonal Functions. In P. E. Cladis und P. Palfy-Muhoray, editors, *Spatio-Temporal Patterns, SFI Studies in the Science of Complexity, Proc. Vol. XXI*. Addison-Wesley, 1994.
- [51] H. Heuser. *Lehrbuch der Analysis I*. B.G. Teubner, Stuttgart, 1989.
- [52] V. I. Oseledec. *A multiplicative ergodic theorem. Lyapunov characteristic numbers for dynamical systems*. Tr. Mosk. Mat. Ob-va, **19**, 179, 1968.
- [53] J. D. Farmer. *Chaotic attractors of an infinite-dimensional dynamic system*. Physica D, **4**, 366–393, 1982.
- [54] M. C. Mackey und L. Glass. *Oscillation and chaos in physiological control systems*. Science, **197**, 287–289, 1977.
- [55] Friedrich Stummel und Karl Hainer. *Praktische Mathematik*. Teubner Studienbücher, Stuttgart, 1982. 2. Auflage.
- [56] Hairer, Norsett und Wanner. *Solving Ordinary Differential Equations - Nonstiff problems, 2nd edition*. Springer Series in Comput. Math. Vol.8, 1993.
- [57] Christopher A. H. Paul und Christopher T. H. Baker. Stability boundaries revisited - Runge-Kutta methods for delay differential equations. Numerical Analysis Report No. 205, University of Manchester, England, Dec 1991.
- [58] A. Wolf, J. B. Swift, H. L. Swinney und J. A. Vastano. *Determining Lyapunov exponents from a time series*. Physica D, **16**, 285–317, 1985.
- [59] G. Fischer. *Lineare Algebra*. Vieweg Verlag, 1986.
- [60] Jon M. Nese. *Quantifying local predictability in phase space*. Physica D, **35**, 237–250, 1989.
- [61] C.-D. Schönwiese. *Praktische Statistik*. Gebrüder Borntraeger, Berlin Stuttgart, 1989.
- [62] N. Mac Donald. *Biological Delay Systems, Cambridge Studies in Mathematical Biology 8*. Cambridge University Press, Cambridge, 1989.
- [63] M. Youssefmir und B.A. Huberman. *Clustered Volatility in Multiagent Dynamics*. 1995.
- [64] T. Hogg, B.A. Huberman und M.Youssefmir. *The Instability of Markets*. 1995.

- [65] Christopher A. H. Paul und Christopher T. H. Baker. Explicit Runge-Kutta Methods for the Numerical Solution of Singular Delay Differential Equations. Numerical Analysis Report No. 212, University of Manchester, England, April 1992.
- [66] Christopher A. H. Paul. Developing a Delay Differential Equation Solver. Numerical Analysis Report No. 204, University of Manchester, England, Dec 1991.
- [67] K. Briggs. *An improved method for estimating Lyapunov exponents of chaotic time series*. Phys. Lett. A, **151**(1-2), 27–32, 1990.
- [68] M. Sano und Y. Sawada. *Measurement of Lyapunov Spectrum from a Chaotic Time Series*. Phys. Rev. Lett., **55**(10), 1082–1085, 1985.
- [69] D.E. Knuth. *The Art of Computer Programming*, volume 3, Sorting and Searching. Addison-Wesley, 1973.
- [70] T. Buzug, T. Reimers und G. Pfister. Dimensions and Lyapunov Spectra from Measured Time Series of Taylor-Couette-Flow. Nonlinear Evolution of Spatio-Temporal Structures in Dissipative Continuous Systems, Proceedings of Advanced Research Workshop, September 24-29, 1989, Streitburg, Germany.
- [71] U. Parlitz. *Identification of true and spurious Lyapunov exponents from time series*. Int. J. of Bifurcation and Chaos, **2**(1), 155–165, 1992.
- [72] B. Hübinger, R. Doerner, H. Heng und W. Martienssen. *Approaching Nonlinear Dynamics by studying the motion of a pendulum III: Predictability and control of chaotic motion*. Int. J. of Bif. & Chaos, August 1994.
- [73] Bernd Hübinger. *Die Steuerung deterministisch chaotischer Bewegungen*. Dissertation, Johann Wolfgang Goethe-Universität Frankfurt/Main, 1992.
- [74] Robert Doerner. *Die Vorhersagbarkeit von deterministisch-chaotischen Bewegungen*. Dissertation, Johann Wolfgang Goethe-Universität Frankfurt/Main, 1992.
- [75] O. E. Rössler. *An equation for continuous chaos*. Phys. Lett. A, **57**, 397, 1976.
- [76] O. E. Rössler. *An equation for hyperchaos*. Phys. Lett. A, **71**, 155, 1979.

9 Danksagung

Herrn Prof.Dr.Dr.hc.W.Martienssen danke ich herzlichst für die freundliche Aufnahme in das Physikalische Institut der Johann Wolfgang Goethe-Universität in Frankfurt. Seiner Unterstützung auch zu Fragen, die über den Rahmen dieser Arbeit hinausgingen, bin ich zu großem Dank verpflichtet.

Herrn Thorsten Schneider danke ich für die engagierte Betreuung und die immer vorhandene Bereitschaft, mir bei Fragen hilfreich zur Seite zu stehen.

Herrn Heiner Heng danke ich für seine stets motivierenden Ratschläge und die unzähligen fruchtbaren Diskussionen, die ich mit ihm führen durfte. Sein Einsatz für die gesamte Arbeitsgruppe erstreckt sich weit über den gewöhnlichen Rahmen hinaus und hat wesentlich zu einer angenehmen und erfolgreichen Zusammenarbeit beigetragen.

Den übrigen Mitgliedern unserer Arbeitsgruppe - Ingo Antony-Spies, Michael Bauer, Torsten Kopp, Uwe Krüger, Stefan Lanz, Stefan Liehr, Jörg Warneke, Oliver Watzke, Christof Wege, Michael Zeller und Holger Zimmermann - möchte ich für die angenehme Arbeitsatmosphäre und die freundliche Unterstützung bei Fragen aller Art danken.

Schließlich bedanke ich mich herzlichst bei all denen, die mich bei der Erstellung dieser Arbeit in den verschiedensten Formen unterstützt haben.

Die Arbeit wurde aus Mitteln des Sonderforschungsbereiches 185 - Nichtlineare Dynamik gefördert.